

ΘΕΜΑ 1

A. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

B. (ίδιο με Διαγώνισμα 24.3 Θέμα 1 - Β)

ΘΕΜΑ 2

α) Τα σημεία του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) βρίσκονται σε μία καμπύλη που ονομάζεται έλλειψη. Οι εστίες της E και E' έχουν συντεταγμένες $E(\sqrt{5}, 0)$ και $E'(-\sqrt{5}, 0)$. Το μήκος του μεγάλου άξονα είναι

ίσο με 6 και η εκκεντρότητα της είναι ίση με $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$

β) Η εφαπτόμενη στο $B(0, -2)$ έχει εξίσωση :

$$\varepsilon: \frac{x \cdot x_1}{9} + \frac{y \cdot y_1}{4} = 1 \quad \xrightarrow{x_1=0, y_1=-2} \quad y = -2$$

ΘΕΜΑ 3

α) Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων :

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = 3 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x)^2 - x^2 = 3 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - x^2 = 3 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = 3 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ή } x = -1 \\ y = 2 \text{ ή } y = -2 \end{cases}$$

Άρα η υπερβολή και η ευθεία έχουν δύο κοινά σημεία, τα $K(1, 2)$ και $\Lambda(-1, -2)$

β) Στο K η εφαπτόμενη είναι :

$$\varepsilon_1: y \cdot y_1 - x \cdot x_1 = 3 \quad \xrightarrow{x_1=1, y_1=2} \quad 2y - x = 3 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}$$

Στο Λ η εφαπτόμενη είναι :

$$\varepsilon_2: y \cdot y_2 - x \cdot x_2 = 3 \quad \xrightarrow{x_2=-1, y_2=-2} \quad -2y + x = 3 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Αφού $\lambda_1 = \lambda_2$, $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

ΘΕΜΑ 4

α) i) Το ορθογώνιο βάσης είναι τετράγωνο, άρα συμπεραίνουμε ότι $\alpha = \beta$

Οι ασύμπτωτες της είναι οι $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$ και αφού $\alpha = \beta$, οι $y = \pm x$

ii) $\varepsilon^2 = 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{2}$

β) i) Έστω $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ η εξίσωση της υπερβολής

Αφού το σημείο $(2, 0)$ ανήκει στην εφαπτόμενη, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της.

$$\text{Άρα: } \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\alpha^2} = 1 \Rightarrow \frac{2^2}{\alpha^2} - \frac{0^2}{\alpha^2} = 1 \Rightarrow \alpha^2 = 4 \xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = 2$$

Οι ευθείες παράλληλες στις ασύμπτωτες είναι της μορφής $y = \pm x + \kappa$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία με την υπερβολή, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους

(ενδεικτικά εκλέγουμε το θετικό πρόσημο)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = x + \kappa \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - (x + \kappa)^2 = 1 \\ y = x + \kappa \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - (x^2 + 2\kappa x + \kappa^2) = 1 \\ y = x + \kappa \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\kappa x - \kappa^2 = 1 \\ y = x + \kappa \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \kappa^2}{2\kappa} \\ y = \frac{1 + \kappa^2}{2\kappa} \end{cases} \Rightarrow \text{μοναδική λύση}$$

- ii)** Η (ζ) δεν είναι εφαπτόμενη της υπερβολής αφού το μοναδικό σημείο τομής προέκυψε από εξίσωση $1 = \overset{\text{ov}}{\text{βαθμού}}$ (και όχι από δευτεροβάθμια με διακρίνουσα 0)