

ΘΕΜΑ 1

A. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

B. (ίδιο με Διαγώνισμα 24.2 Θέμα 1 - Β)

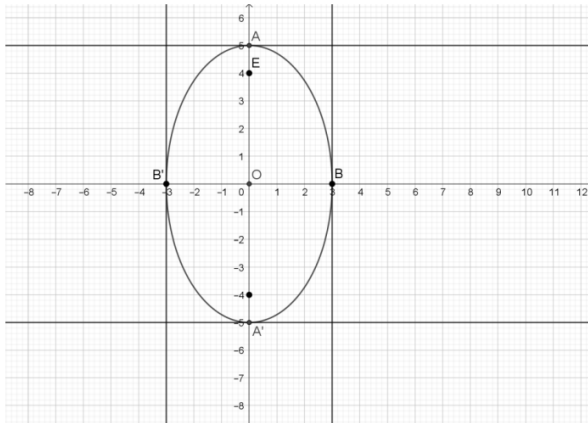
ΘΕΜΑ 2

α) Η έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ έχει $\alpha = 3$, $\beta = 5$ και $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = 4$

Άρα αφού προφανώς έχει τις εστίες της στον άξονα $y'y$ αυτές είναι οι :

$E'(0, -\gamma)$, $E(0, -\gamma)$ άρα οι $E'(0, -4)$ και $E(0, 4)$

β)



γ) οι εφαπτόμενες στις κορυφές είναι οι $y = \pm \alpha$ και οι $x = \pm \beta$ (σχήμα)

ΘΕΜΑ 3

α) Έχουμε $5x^2 + 9y^2 = 45 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

Άρα η έλλειψη έχει $\alpha = 3$, $\beta = \sqrt{5}$ και $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{4} = 2$

Οι εστίες της είναι οι $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ άρα οι $E'(-2, 0)$ και $E(2, 0)$

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης :

Όμως : $5x^2 + 9y^2 = 45 \Rightarrow 5(-2)^2 + 9\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = 45 \Rightarrow 20 + 25 = 45$ που ισχύει

Άρα το $A\left(-2, -\frac{5}{3}\right)$ είναι σημείο της έλλειψης

γ) Από την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης, γνωρίζουμε ότι η διχοτόμος της

$\widehat{E'AE}$ είναι κάθετη στην εφαπτόμενη της έλλειψης στο Α

Όμως η εφαπτόμενη στο Α έχει εξίσωση :

$$\text{εφ: } 5xx_1 + 9yy_1 = 45 \Rightarrow 5(-2)x + 9\left(-\frac{5}{3}\right)y = 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10x - 15y = 45 \Rightarrow 2x + 3y + 9 = 0$$

$$\text{Άρα } \lambda_{\text{εφ}} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Οπότε η διχοτόμος θα έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda_{\varepsilon} = -\frac{1}{\lambda_{\text{εφ}}} = \frac{3}{2}$$

και αφού διέρχεται από το Α θα έχει εξίσωση :

$$y - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{2}(x - (-2)) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}$$

ΘΕΜΑ 4

α) Η απόσταση της εστίας από την διευθετούσα είναι $|p|$

Αφού η εστία της παραβολής είναι στον θετικό ημιάξονα, έχουμε $p > 0$ άρα $p = 4$

$$\text{Είναι } E\left(\frac{p}{2}, 0\right) = E(2, 0) \text{ και } \delta: x = -\frac{p}{2} \Rightarrow x = -2$$

$$\text{Η εξίσωση της παραβολής είναι } y^2 = 2px \Rightarrow y^2 = 8x$$

β) Η εξίσωση της εφαπτόμενης της παραβολής στο $A(2, 4)$ έχει εξίσωση :

$$\varepsilon: yy_1 = p(x + x_1) \quad \overset{p=4, x_1=2, y_1=4}{\Rightarrow} 4y = 4(x + 2) \Rightarrow y = x + 2$$

γ) Έστω Κ το κέντρο του κύκλου, αφού η ε είναι εφαπτόμενη, θα είναι :

$$KA \perp \varepsilon \Rightarrow \lambda_{KA} = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon} = -1 \Rightarrow \frac{y_A - y_K}{x_A - x_K} = -1 \Rightarrow (4 - y_K) = -(2 - x_K) \quad (1)$$

Επίσης, το κέντρο Κ ισαπέχει από τα Α και Ε

$$\begin{aligned} \text{Άρα: } (KA) &= (KE) \Rightarrow \sqrt{(x_A - x_K)^2 + (y_A - y_K)^2} = \sqrt{(x_E - x_K)^2 + (y_E - y_K)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (2 - x_K)^2 + (4 - y_K)^2 = (2 - x_K)^2 + (0 - y_K)^2 \Rightarrow (4 - y_K)^2 = y_K^2 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $(x_K, y_K) = (4, 2)$

Άρα Κ(4, 2) και η ακτίνα είναι $(KE) = 2\sqrt{2}$

Άρα ο κύκλος έχει εξίσωση $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 8$