

ΘΕΜΑ 1

A. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

B. Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο C αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του O απόσταση ίση με ρ , δηλαδή :

$$(OM) = \rho \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$$

ΘΕΜΑ 2

Το $E(-4, 0)$ θα είναι η εστία της προβολής και η $x = 4$ είναι η διευθετούσα

Άρα $\frac{p}{2} = 4 \Rightarrow p = 8$ και η προβολή έχει εξίσωση :

$$y^2 = 2px \Rightarrow y^2 = 16x$$

ΘΕΜΑ 3

α) Για να βρούμε τα σημεία τομής των ελλείψεων, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8 \\ 4x^2 + y^2 = 8 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 8 - 4y^2 \\ 4(8 - 4y^2) + y^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 8 - 4y^2 \\ 32 - 16y^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 8 - 4y^2 \\ 15y^2 = 22 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 8 - 4y^2 \\ y = \sqrt{\frac{22}{15}} \text{ ή } y = -\sqrt{\frac{22}{15}} \end{cases} \end{aligned}$$

Για καθεμία από τις δύο τιμές y παίρνουμε δύο τιμές x
Άρα το σύστημα έχει τέσσερα ζευγάρια λύσεων

β) Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις του συστήματος, παίρνουμε :

$$5x^2 + 5y^2 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{16}{5}$$

Άρα έχουμε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $p = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

ΘΕΜΑ 4

α) Είναι $A = -2$, $B = 4$, $\Gamma = 1$

$$\text{Άρα } A^2 + B^2 - 4\Gamma = 4 + 16 - 4 = 16 > 0$$

Οπότε η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K(1, -2)$

$$\text{και ακτίνα } p = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = 2$$

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(KM) > p$

$$\text{Είναι } (KM) = \sqrt{(3-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} > 2$$

Άρα το M βρίσκεται έξω από τον κύκλο

γ) Αρχικά παρατηρούμε ότι η ευθεία $\varepsilon: x=3$ διέρχεται από το Μ και ισχύει

$$d(\kappa, \varepsilon) = \frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 2 = p$$

Άρα η $x=3$ είναι εφαπτόμενη του κύκλου

Έστω τώρα μία ευθεία με κλίση λ που διέρχεται από το Μ, δηλαδή :

$$\varepsilon: y-2=\lambda(x-3) \Rightarrow y-\lambda x-2+3\lambda=0$$

Για να είναι εφαπτόμενη θα πρέπει :

$$d(\kappa, \varepsilon) = p \Rightarrow \frac{|-2-\lambda \cdot 1-2+3\lambda|}{\sqrt{1^2+(-\lambda)^2}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2|\lambda-2|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 2 \Rightarrow (\lambda-2)^2 = (\lambda^2+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4}$$

$$\text{Άρα } \varepsilon: y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$