

ΘΕΜΑ 1

A. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

B. Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$
 Γνωρίζουμε από την γεωμετρία ότι ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην ε αν και μόνο αν
 $OA \perp AM$ δηλαδή :
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Rightarrow (x_1, y_1) \cdot (x - x_1, y - y_1) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = x_1^2 + y_1^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow xx_1 + yy_1 = \rho^2$

ΘΕΜΑ 2

Οι κάθετες εφαπτόμενες της έλλειψης εφάπτονται στις κορυφές της .

Άρα είναι : $\alpha = 5$ και $\beta = 3$

Επομένως $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ και οι εστίες είναι οι $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$

Δηλαδή οι $E'(-4, 0)$ και $E(4, 0)$

ΘΕΜΑ 3

α) Οι συντεταγμένες του K επαληθεύουν την εξίσωση της υπερβολής αφού

$$x^2 - y^2 = 3 \Rightarrow 2^2 - 1^2 = 3 \text{ που ισχύει}$$

Άρα το K ανήκει στην υπερβολή

Όμοια για το Λ

$$x^2 - y^2 = 3 \Rightarrow (-2)^2 - 1^2 = 3 \text{ που ισχύει}$$

Άρα το Λ ανήκει στην υπερβολή

β) Η εφαπτόμενη της υπερβολής στο K έχει εξίσωση :

$$x \cdot x_K - y \cdot y_K = 3 \Rightarrow 2x - y = 3$$

Ενώ η εφαπτόμενη της υπερβολής στο Λ έχει εξίσωση :

$$x \cdot x_\Lambda - y \cdot y_\Lambda = 3 \Rightarrow -2x - y = 3$$

Για να βρούμε που τέμνονται , λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους και

βρίσκουμε ότι το σημείο τομής τους είναι το $A\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

Άρα τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$

ΘΕΜΑ 4

α) Θα πρέπει : $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (-4\kappa)^2 + (-2\kappa)^2 - 4 \cdot 4 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\kappa^2 + 4\kappa^2 - 16 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\kappa^2 > 16 \Rightarrow \kappa^2 > \frac{16}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa \in \left(-\infty, \frac{4}{\sqrt{20}}\right) \cup \left(\frac{4}{\sqrt{20}}, +\infty\right)$$

β) $K\left(-\left(-\frac{4\kappa}{2}\right), -\left(-\frac{2\kappa}{2}\right)\right) = K(2\kappa, \kappa)$

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{20\kappa^2 - 16}}{2} = \sqrt{5\kappa^2 - 4}$$

γ) Έστω $K(x, y)$ κέντρο ενός από τους κύκλους, τότε :

$$x = 2\kappa \quad \text{και} \quad y = \kappa \Rightarrow x = 2y$$

Άρα τα κέντρα ανήκουν στην ευθεία $x - 2y = 0$

ε) Για $\kappa = 1$ ο κύκλος γράφεται $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$,

έχει κέντρο $K(2, 1)$ και ακτίνα $\rho = 1$

Επειδή $x_K = x_\Gamma = 2$ συμπεραίνουμε ότι η $K\Gamma$ είναι κάθετη στον άξονα $x'x$,

Άρα η εφαπτόμενη στο Γ θα είναι κάθετη στον άξονα $y'y$

Οπότε, αφού διέρχεται από το $\Gamma(2, 2)$, θα έχει εξίσωση $y = 2$