

ΘΕΜΑ 1

A. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

B. Έστω κύκλος με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ

$$\text{Τότε έχει εξίσωση: } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \Rightarrow x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = \rho^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - \rho^2) = 0$$

$$\text{Άρα είναι της μορφής } x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$$

$$\text{με } A = -2x_0, B = -2y_0 \text{ και } \Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$$

ΘΕΜΑ 2

Γενικά οι εστίες είναι οι $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$

Άρα τώρα που είναι οι $E'(0, -13)$ και $E(0, 13)$ συμπεραίνουμε ότι $\gamma = 13$

$$\text{Επίσης } |(ME') - (ME)| = 24 \Rightarrow 2\alpha = 24 \Rightarrow \alpha = 12$$

$$\text{Τέλος είναι } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow \beta^2 = 169 - 144 \Rightarrow \beta^2 = 25$$

$$\text{Άρα η υπερβολή έχει εξίσωση } \frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$$

ΘΕΜΑ 3

α) Το M είναι σημείο της παραβολής αλλά και της ευθείας $y = 2$

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} y = 2 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 2^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow M(2, 2)$$

β) Με βάση την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής, η ζητούμενη διχοτόμος είναι η κάθετη στην εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο M.

$$\text{Όμως η εφαπτομένη έχει εξίσωση } \text{εφ: } y \cdot y_1 = p(x + x_1) \xrightarrow{p=1, x_1=2=y_1} 2y = x + 2 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 1$$

$$\text{Οπότε } \lambda_{\text{εφ}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon} = -\frac{1}{\lambda_{\text{εφ}}} = -2$$

$$\text{Άρα η ε διέρχεται από το } M(2, 2) \text{ και έχει } \lambda_{\varepsilon} = -2$$

$$\text{Άρα έχει εξίσωση } \varepsilon: y - 2 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 2$$

ΘΕΜΑ 4

α) Έστω $K(x_0, y_0)$

Το K ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 7$ άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν

$$\text{την εξίσωσή της: } y_0 = 2x_0 - 7 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης ισχύει } (KA) = (KB) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2} = \sqrt{(x_B - x_0)^2 + (y_B - y_0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 = (6 - x_0)^2 + (1 - y_0)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 - 6x_0 + x_0^2 + 4 - 4y_0 + y_0^2 = 36 - 12x_0 + x_0^2 + 1 - 2y_0 + y_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x_0 - 4y_0 + 13 = -12x_0 - 2y_0 + 37 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x_0 - 2y_0 = 24 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1),(2) βρίσκουμε $x_o = 5$ και $y_o = 3$, άρα $K(5,3)$

$$\beta) R = (KA) = \sqrt{(x_A - 5)^2 + (y_A - 3)^2} = \sqrt{5}$$

$$\gamma) C: (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = R^2 \Rightarrow (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 5$$