

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 24.1**ΘΕΜΑ 1**

A. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

B. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ γράφεται διαδοχικά :

$$(x^2 + Ax) + (y^2 + By) = -\Gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{2A}{2}x + \frac{A^2}{4} \right) + \left(y^2 + \frac{2By}{2} + \frac{B^2}{4} \right) = -\Gamma + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{A}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{B}{2} \right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}$$

Άρα, αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) \text{ και } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

ΘΕΜΑ 2

Γενικά οι εστίες της έλλειψης είναι οι $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$, άρα τώρα που

είναι $E'(-3, 0)$ και $E(3, 0)$ συμπεραίνουμε ότι $\gamma = 3$

Επίσης $(ME') + (ME) = 10 \Rightarrow 2\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 5$

Τέλος $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Rightarrow \beta^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow \beta^2 = 16$

Άρα, και αφού η έλλειψη έχει εστίες στον άξονα $x'x$, θα έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

ΘΕΜΑ 3

Η παραβολή $x^2 = 2y$ έχει $\rho = 1$, άρα η εφαπτομένη σε ένα σημείο της (x_0, y_0)

έχει εξίσωση $xx_0 = \rho(y + y_0) \Rightarrow xx_0 = \rho y + \rho y_0 \Rightarrow y = \frac{x \cdot x_0}{\rho} - \rho y_0 \Rightarrow$

$$\stackrel{\rho=1}{\Rightarrow} y = x \cdot x_0 - y_0 \stackrel{y=\lambda x + \beta}{\Rightarrow} x_0 = \lambda \text{ και } y_0 = -\beta$$

Όμως το σημείο (x_0, y_0) ανήκει στην παραβολή, άρα :

$$x_0^2 = 2y_0 \Rightarrow \lambda^2 = 2 \cdot (-\beta) \Rightarrow \lambda^2 + 2\beta = 0$$

ΘΕΜΑ 4

α) Ο κύκλος (K, R) έχει $A = -6$, $B = -4$, $\Gamma = 21$ άρα έχει κέντρο :

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K(3, 21) \text{ και ακτίνα } R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

Ο κύκλος (Λ, ρ) έχει $A = 2$, $B = -2$, $\Gamma = 1$ άρα έχει κέντρο :

$$\Lambda\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = \Lambda(-1, 1) \text{ και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

$$\beta) (K\Lambda) = \sqrt{(x_K - x_\Lambda)^2 + (y_K - y_\Lambda)^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-2)^2} = 5$$

Είναι $(K\Lambda) > R + \rho = 3$, άρα οι δύο κύκλοι βρίσκονται εξωτερικά ο ένας του άλλου

γ) Η μέγιστη απόσταση είναι η διάκεντρος συν τις ακτίνες των δύο κύκλων, δηλαδή :

$$d_{\max} = (K\Lambda) + R + \rho = 5 + 2 + 1 = 8$$

$$\text{Ενώ } d_{\min} = (K\Lambda) - R - \rho = 5 - 2 - 1 = 2$$

