

23.Α1

α) i) Ο κύκλος έχει κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$

$$\text{Άρα η εξίσωση του είναι η } (x-0)^2 + (y-0)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

ii) Ελέγχουμε αν οι συντεταγμένες του κέντρου $O(0,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της θέσης του αγωγού : $3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 5 \Rightarrow 0 = 5$ που δεν ισχύει
Άρα ο αγωγός δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού

iii) Θέλουμε σημείο A τέτοιο ώστε $OA \perp \varepsilon$

$$\text{Άρα } \lambda_{OA} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Rightarrow \lambda_{OA} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Η } AO \text{ έχει εξίσωση } y - y_0 = \lambda_{OA}(x - x_0) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$$

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου A ,
λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των OA και ε :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 25 \\ y = \frac{4x}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + \frac{16x}{3} = 25 \\ y = \frac{4x}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{25x}{3} = 25 \\ y = \frac{4x}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(3,4)$$

$$\beta) \text{ Θα πρέπει } d(O, \varepsilon) = \rho \Rightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 + 0 + (\lambda - 2)|}{\sqrt{\lambda^2 + 1^2}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\lambda - 2| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 4(\lambda^2 + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 4\lambda^2 + 4 \Rightarrow \lambda(3\lambda + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \text{ (απορρίπτεται)} \quad \text{ή} \quad \lambda = -\frac{4}{3}$$

23.Α2

α) Έχουμε : $A^2 + B^2 - 4\Gamma = \lambda^2 + \lambda^2 - 4(\lambda - 1) = 2(\lambda^2 - 2\lambda + 2) > 0$
για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, αφού $\Delta < 0$

$$\beta) \text{ Είναι } K\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right) \text{ και } \rho = \frac{\sqrt{2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)}}{2}$$

Για να εφάπτεται της ε , θα πρέπει :

$$d(K, \varepsilon) = \rho \Rightarrow \frac{\left|1 \cdot \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{\lambda}{2}\right) + 2\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + 2\right| = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2}}{2} \Rightarrow |2 - \lambda| = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 - 4\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 \Rightarrow 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\text{Τότε θα είναι } K\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ και } \rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

γ) Για $\lambda = 1$, ο κύκλος γράφεται $x^2 + y^2 + x + y = 0$

Οι ευθείες που διέρχονται από το $M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ έχουν τη μορφή :

$$\varepsilon_\lambda : y = \frac{1}{2} = \lambda \left(x + \frac{3}{2} \right) \Rightarrow y = \lambda x + \lambda \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow 2\lambda x - 2y + 3\lambda - 1 = 0$$

Για να εφάπτεται στον κύκλο θα πρέπει :

$$d(\kappa, \varepsilon_\lambda) = \rho \Rightarrow \frac{\left| 2\lambda \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) - 2 \left(-\frac{1}{2} \right) + 3\lambda - 1 \right|}{\sqrt{4\lambda^2 + 4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|2\lambda|}{\sqrt{4\lambda^2 + 4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{4\lambda^2}{4\lambda^2 + 4} = \frac{2}{4} \Rightarrow 4 \cdot 4\lambda^2 = 2(4\lambda^2 + 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\lambda^2 = 8\lambda^2 + 8 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \quad \text{ή} \quad \lambda = -1$$

Για $\lambda = 1$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $2x - 2y + 2 = 0$

Για $\lambda = -1$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $-2x - 2y - 4 = 0$

23.Δ3

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι αδύνατο.

$$\text{Πράγματι : } \begin{cases} y^2 = 3x \\ 3x + 4y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 3x \\ y^2 + 4y + 10 = 0 \end{cases}$$

Η δεύτερη εξίσωση έχει $\Delta = -36 < 0$, άρα το σύστημα είναι αδύνατο

β) Ένα σημείο M της προβολής έχει συντεταγμένες $M(x_o, y_o) \stackrel{3x_o=y_o^2}{=} \left(\frac{y_o^2}{3}, y_o \right)$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } d(M, \varepsilon) &= \frac{\left| 3 \cdot \frac{y_o^2}{3} + 4y_o + 10 \right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|y_o^2 + 4y_o + 10|}{\sqrt{25}} = \\ &\Rightarrow \frac{|y_o^2 + 4y_o + 4 + 6|}{\sqrt{5}} = \frac{|(y_o + 2)^2 + 6|}{\sqrt{5}} = \frac{(y_o + 2)^2 + 6}{5} \end{aligned}$$

γ) Έχουμε $d(M, \varepsilon) = \frac{(y_o + 2)^2 + 6}{5} \geq \frac{6}{5}$ με ισότητα για $y_o = -2$

Άρα θα είναι $M\left(\frac{4}{3}, -2\right)$

δ) $\varepsilon : yy_1 = \rho(x + x_1) \stackrel{\rho=\frac{3}{2}, x_1=\frac{y}{3}, y_1=-2}{\Rightarrow} -2y = \frac{3}{2}\left(x + \frac{4}{3}\right) \Rightarrow -2y - \frac{3x}{2} - 2 = 0$