

23.Γ1

α) Για τον C_1 έχουμε :

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 - 4\Gamma &= (-2\lambda)^2 + (-8)^2 - 4(\lambda^2 + 7) = \\ &= 4\lambda^2 + 64 - 4\lambda^2 - 28 = 36 > 0 \quad \text{άρα παριστάνει κύκλο} \\ \text{και για τον } C_2 \text{ έχουμε :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2^2 + B_2^2 - 4\Gamma_2 &= 6^2 + (-2\lambda)^2 - 4(\lambda^2 + 5) = \\ &= 36 + 4\lambda^2 - 4\lambda^2 - 20 = 16 > 0 \quad \text{άρα παριστάνει κύκλο} \end{aligned}$$

β) Ο C_1 έχει κέντρο $K_1 = \left(-\frac{A_1}{2}, \frac{B_1}{2}\right) = (\lambda, 4)$

ενώ ο C_2 έχει κέντρο $K_2 = \left(-\frac{A_2}{2}, \frac{B_2}{2}\right) = (-3, \lambda)$

Για να εφάπτονται οι δύο κύκλοι εξωτερικά θα πρέπει :

$$(K_1, K_2) = R_1 + R_2 \quad \text{όπου } R_1 = 3 \text{ και } R_2 = 2$$

$$\text{Άρα θα πρέπει : } \sqrt{(\lambda + 3)^2 + (4 - \lambda)^2} = 5 \Rightarrow (\lambda + 3)^2 + (4 - \lambda)^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 9 + 16 - 8\lambda + \lambda^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1$$

23.Γ2

α) Γενικά η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \pm \frac{\beta}{\alpha} x$

Τώρα που η $y = 2x$ είναι ασύμπτωτη, συμπεραίνουμε ότι :

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2 \xRightarrow[\beta=\sqrt{20}]{\alpha=\rho} \frac{\sqrt{20}}{\rho} = 2 \Rightarrow \rho = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

β) Ο κύκλος έχει το κέντρο του στον θετικό ημιάξονα Ox , άρα :

έστω $K(x_0, 0)$ το κέντρο του, $x_0 > 0$

Η ευθεία $y = 2x$ εφάπτεται στον κύκλο, άρα θα ισχύει :

$$d(\varepsilon, \kappa) = \rho \Rightarrow \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot x_0|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow |2x_0| = 5 \xRightarrow{x_0 > 0} x_0 = \frac{5}{2}$$

$$\text{Άρα ο κύκλος έχει εξίσωση : } C: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = 5$$

γ) Ο κύκλος έχει κέντρο $K\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η απόσταση

της αρχής των αξόνων $O(0, 0)$ από το κέντρο του κύκλου είναι μικρότερη από την ακτίνα.

Όμως

$$d(K, O) = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 0\right)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$$

Απομένει να αποδείξουμε ότι $\frac{5}{2} < \sqrt{5}$. Έχουμε ισοδύναμα

$$\frac{5}{2} < \sqrt{5} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^2 < \sqrt{5}^2 \Leftrightarrow \frac{25}{4} < 5 \Leftrightarrow 25 < 20 \text{ που ισχύει}$$

23.Γ3

α) Αφού η $y = 3$ είναι εφαπτομένη της έλλειψης, συμπεραίνουμε ότι η $B(0, 3)$

είναι κορυφή της έλλειψης. Αφού και η $A(5, 0)$ είναι κορυφή συμπεραίνουμε ότι :

$$\alpha = 5, \beta = 3 \text{ και η εξίσωση της έλλειψης είναι η } \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow 9x^2 + 25y^2 = 225$$

β) Η εφαπτομένη της έλλειψης σε ένα σημείο $K(x_1, y_1)$ είναι η :

$$\varepsilon : 9xx_1 + 25yy_1 = 225$$

Τα M, N έχουν τετμημένη 4. Για $x_1 = 4$ παίρνουμε : $36x + 25yy_1 = 225$

Έστω $M(4, y_1)$ και $N(4, y_2)$. Οι δύο εφαπτόμενες τέμνονται στο :

$$\begin{cases} 36x + 25yy_1 = 225 \\ 36x + 25yy_2 = 225 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36x + 25yy_1 = 225 \\ 36x = 225 - 25yy_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 225 - 25yy_2 + 25yy_1 = 225 \\ 36x = 225 - 25yy_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 25y(y_1 - y_2) = 0 \\ 36x = 225 - 25yy_2 \end{cases} \xrightarrow{y_1 \neq y_2} \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{225}{36} \end{cases} \Rightarrow \Lambda\left(\frac{225}{36}, 0\right) \text{ που ανήκει στον άξονα } x'x$$

23.Γ4

α) Αρκεί $(2\lambda)^2 + (-4\mu)^2 - 4 \cdot 3\mu^2 > 0 \Rightarrow 4\lambda^2 + 16\mu^2 - 12\mu^2 > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4\lambda^2 + 4\mu^2 > 0 \Rightarrow \lambda^2 + \mu^2 > 0 \Rightarrow \lambda \neq 0 \text{ και } \mu \neq 0 \text{ που ισχύει, αφού } |\lambda| + |\mu| \neq 0$$

β) Ο κύκλος έχει κέντρο $K(-\lambda, 2\mu)$

Αφού ο κύκλος διέρχεται από το $A(-2, 1)$, οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν

$$\text{την εξίσωση του κύκλου. Άρα θα ισχύει : } (-2)^2 + 1^2 + 2\lambda(-2) - 4\mu \cdot 1 + 3\mu^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 1 - 4\lambda - 4\mu + 3\mu^2 = 0 \Rightarrow 3\mu^2 - 4\mu - 4\lambda + 5 = 0 \quad (1)$$

Επίσης το κέντρο K ανήκει στην ευθεία $x + y - 1 = 0$,

$$\text{άρα θα ισχύει } -\lambda + 2\mu - 1 = 0 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ ή $(\lambda, \mu) = (5, 3)$

23.Γ5

Η παραβολή $y^2 = 12x$ έχει $p = 6$ και εστία $E(3, 0)$

Η εφαπτομένη της στο $A(1, 2\sqrt{3})$ έχει εξίσωση : $\varepsilon : yy_1 = 6(x + x_1) \xrightarrow[x_1=1]{y_1=2\sqrt{3}} 2\sqrt{3}y = 6x + 6$

Για να βρούμε που τέμνει τον άξονα $x'x$ θέτουμε $y = 0$ και βρίσκουμε $x = -1$

Άρα είναι $B(-1, 0)$ οπότε έχουμε :

$$|\overline{EA}| = \sqrt{(1-3)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

$$|\overline{EB}| = \sqrt{(-1-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-4)^2} = 4$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$$

Άρα το τρίγωνο EAB έχει τις πλευρές του ίσες μεταξύ τους, άρα είναι ισόπλευρο

23.Γ6

Αρχικά ο κύκλος που δίνεται έχει κέντρο $K(\alpha, \beta)$

και ακτίνα $\frac{\sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2 + 4\gamma}}{2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma}$

Αφού η ευθεία $\varepsilon: \alpha x + \beta y = \kappa$ είναι διάκεντρος του κύκλου, θα διέρχεται από το κέντρο Κ.

Άρα οι συντεταγμένες του Κ θα επαληθεύουν την εξίσωση της ε , δηλαδή :

$$\alpha \cdot \alpha + \beta \cdot \beta = \kappa \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 - \kappa = 0$$