

22.3 1)

Λύνουμε την εξίσωση της ευθείας $x - y + \beta = 0$ ως προς y και έχουμε $y = x + \beta$ το οποίο το αντικαθιστούμε στην εξίσωση της παραβολής και έχουμε

$$y^2 = 4x \Rightarrow (x + \beta)^2 = 4x \Rightarrow x^2 + 2\beta x + \beta^2 = 4x \Rightarrow x^2 + 2\beta x - 4x + \beta^2 = 0 \Rightarrow x^2 + (2\beta - 4)x + \beta^2 = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι δευτεροβάθμια και θα πρέπει (προκειμένου η ευθεία $x - y + \beta = 0$ να εφάπτεται στην παραβολή $y^2 = 4x$) να έχει μία διπλή ρίζα, οπότε θα πρέπει

$$\Delta = 0 \Rightarrow (2\beta - 4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \beta^2 = 0 \Rightarrow \cancel{4\beta^2} - 16\beta + 16 - \cancel{4\beta^2} = 0 \Rightarrow -16\beta = -16 \Rightarrow \beta = 1$$

22.3 2)

Λύνουμε την εξίσωση της ευθείας $x + y + \beta = 0$ ως προς το y και έχουμε :

$y = -x - \beta$ το οποίο το αντικαθιστούμε στην εξίσωση της παραβολής και έχουμε :

$$y^2 = 8x \Rightarrow (-x - \beta)^2 = 8x \Rightarrow x^2 + 2\beta x + \beta^2 = 8x \Rightarrow x^2 + (2\beta - 8)x + \beta^2 = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι δευτεροβάθμια και θα πρέπει (προκειμένου η ευθεία $x + y + \beta = 0$ να εφάπτεται στην παραβολή $y^2 = 4x$) να έχει μια διπλή ρίζα,

$$\text{οπότε θα πρέπει: } \Delta = 0 \Rightarrow (2\beta - 8)^2 - 4\beta^2 = 0 \Rightarrow 4\beta^2 - 32\beta + 64 - 4\beta^2 = 0 \Rightarrow \beta = 2$$

22.3 3)

Αντικαθιστούμε το y της ευθείας στην εξίσωση της παραβολής και έχουμε :

$$y^2 = -12x \Rightarrow (3x + \beta)^2 = -12x \Rightarrow 9x^2 + 6\beta x + \beta^2 = -12x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2 + (6\beta + 12)x + \beta^2 = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι δευτεροβάθμια και θα πρέπει (προκειμένου η ευθεία

$y = 3x + \beta$ να εφάπτεται στην παραβολή $y^2 = -12x$) να έχει μια διπλή ρίζα,

$$\text{οπότε θα πρέπει: } \Delta = 0 \Rightarrow (6\beta + 12)^2 - 4 \cdot 9\beta^2 = 0 \Rightarrow 36\beta^2 + 144\beta + 144 - 36\beta^2 = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

22.3 4)

Αντικαθιστούμε το y της ευθείας στην εξίσωση της έλλειψης και έχουμε :

$$\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{30} + \frac{(-x + \beta)^2}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{30} + \frac{x^2 - 2x\beta + \beta^2}{6} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 5x^2 - 10x\beta + 5\beta^2}{30} = 1 \Rightarrow 6x^2 - 10\beta x + 5\beta^2 = 30 \Rightarrow 6x^2 - 10\beta x + 5\beta^2 - 30 = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι δευτεροβάθμια και θα πρέπει (προκειμένου η ευθεία

$y = -x + \beta$ να εφάπτεται στην έλλειψη $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{6} = 1$) να έχει μια διπλή ρίζα,

$$\text{οπότε θα πρέπει: } \Delta = 0 \Rightarrow 100\beta^2 - 4 \cdot 6 \cdot (5\beta^2 - 30) = 0 \Rightarrow -20\beta^2 = -720 \Rightarrow \beta^2 = 36 \Rightarrow \beta = \pm 6$$

22.3 5)

Αντικαθιστούμε το y της ευθείας στην εξίσωση της έλλειψης και έχουμε :

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{(-2x + \beta)^2}{8} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{4x^2 - 4\beta x + \beta^2}{8} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2 + 4x^2 - 4\beta x + \beta^2}{8} = 1 \Rightarrow 8x^2 - 4\beta x + \beta^2 = 8 \Rightarrow 8x^2 - 4\beta x + \beta^2 - 8 = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι δευτεροβάθμια και θα πρέπει (προκειμένου η ευθεία

$$y = -2x + \beta \text{ να εφάπτεται στην έλλειψη } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1) \text{ να έχει μια διπλή ρίζα ,}$$

$$\text{οπότε θα πρέπει: } \Delta = 0 \Rightarrow 16\beta^2 - 4 \cdot 8 \cdot (\beta^2 - 8) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\beta^2 - 32\beta^2 + 256 = 0 \Rightarrow 16\beta^2 = 256 \Rightarrow \beta^2 = 16 \Rightarrow \beta = \pm 4$$

22.3 6)

Αντικαθιστούμε το y της ευθείας στην εξίσωση της υπερβολής και έχουμε :

$$\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{10} - \frac{(2x + \beta)^2}{15} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{10} - \frac{4x^2 + 4\beta x + \beta^2}{15} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 - 8x^2 - 8\beta x - 2\beta^2}{30} = 1 \Rightarrow -5x^2 - 8\beta x - 2\beta^2 = 30 \Rightarrow 5x^2 + 8\beta x + 2\beta^2 + 30 = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι δευτεροβάθμια και θα πρέπει (προκειμένου η ευθεία

$$y = 2x + \beta \text{ να εφάπτεται στην υπερβολή } \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1) \text{ να έχει μια διπλή ρίζα ,}$$

$$\text{οπότε θα πρέπει: } \Delta = 0 \Rightarrow 64\beta^2 - 4 \cdot 5 \cdot (2\beta^2 + 30) = 0 \Rightarrow 24\beta^2 = 600 \Rightarrow \beta^2 = 25 \Rightarrow \beta = \pm 5$$

22.3 7)

Αντικαθιστούμε το y της ευθείας στην εξίσωση της υπερβολής και έχουμε :

$$\frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} - (-x + \beta)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} - x^2 + 2\beta x - \beta = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 4\beta x - 2\beta^2 = 2 \Rightarrow -x^2 + 4\beta x - 2\beta^2 - 2 = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι δευτεροβάθμια και θα πρέπει (προκειμένου η ευθεία

$$y = -x + \beta \text{ να εφάπτεται στην υπερβολή } \frac{x^2}{2} - y^2 = 1) \text{ να έχει μια διπλή ρίζα ,}$$

$$\text{οπότε θα πρέπει: } \Delta = 0 \Rightarrow 16\beta^2 + 4 \cdot (-2\beta^2 - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\beta^2 - 8\beta^2 - 8 = 0 \Rightarrow 8\beta^2 = 8 \Rightarrow \beta^2 = 1$$