

21.5 1)

α) Αρκεί το σημείο $M(3,2)$ να επαληθεύει την εξίσωση της υπερβολής $C: \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$. Όμως

$$\frac{3^2}{3} - \frac{2^2}{2} = 1 \Leftrightarrow 3 - 2 = 1 \text{ που ισχύει. Άρα το σημείο } M(3,2) \text{ ανήκει στην υπερβολή}$$

$$C: \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$$

β) Είναι $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1 \xrightarrow{x_1=3, y_1=2, \alpha^2=3, \beta^2=2} \frac{3x}{3} - \frac{2y}{2} = 1 \Leftrightarrow x - y = 1 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$

21.5 2)

α) Αρκεί το σημείο $M(2,-2)$ να επαληθεύει την εξίσωση της υπερβολής $C: \frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{12} = 1$. Όμως

$$\frac{(-2)^2}{3} - \frac{2^2}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 \text{ που ισχύει. Άρα το σημείο } M(2,-2) \text{ ανήκει στην υπερβολή}$$

β) Είναι $\frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1 \xrightarrow{x_1=2, y_1=-2, \alpha^2=3, \beta^2=12} \frac{-2y}{3} - \frac{2x}{12} = 1 \Leftrightarrow \frac{2y}{3} + \frac{x}{6} = -1 \Leftrightarrow x + 4y + 6 = 0$

21.5 3)

α) Αρκεί το σημείο $M(10,-3)$ να επαληθεύει την εξίσωση της υπερβολής $C: \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$

$$\text{Όμως: } \frac{10^2}{64} - \frac{(-3)^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{100}{64} - \frac{9}{16} = 1 \Rightarrow \frac{100}{64} - \frac{36}{64} = 1 \Rightarrow \frac{64}{64} = 1 \text{ που ισχύει}$$

Άρα το σημείο $M(10,-3)$ ανήκει στην υπερβολή

β) Είναι $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1 \xrightarrow{x_1=10, y_1=-3, \alpha^2=64, \beta^2=16} \frac{10x}{64} + \frac{3y}{16} = 1 \Rightarrow \frac{5x}{32} + \frac{3y}{16} = 1 \Rightarrow 5x + 6y - 32 = 0$

21.5 4)

α) Αρκεί το σημείο $M(-4,-5)$ να επαληθεύει την εξίσωση της υπερβολής $C: \frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$

$$\text{Όμως: } \frac{(-5)^2}{5} - \frac{(-4)^2}{4} = 1 \Rightarrow 5 - 4 = 1 \text{ που ισχύει}$$

Άρα το σημείο $M(-4,-5)$ ανήκει στην υπερβολή

β) Είναι $\frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1 \xrightarrow{x_1=-4, y_1=-5, \alpha^2=5, \beta^2=4} \frac{-5y}{5} + \frac{4x}{4} = 1 \Rightarrow x - y - 1 = 0$

21.5 5)

α) Αρκεί το σημείο $M(2,1)$ να επαληθεύει την εξίσωση της υπερβολής

$$C: x^2 - y^2 = 3 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$$

$$\text{Όμως: } \frac{2^2}{3} - \frac{1^2}{3} = 1 \Rightarrow \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1 \text{ που ισχύει}$$

Άρα το σημείο $M(2,1)$ ανήκει στην υπερβολή

β) Είναι $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1 \xrightarrow{x_1=2, y_1=1, \alpha^2=\beta^2=3} \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$

21.5 6)

α) Αρκεί το σημείο $M(-6,8)$ να επαληθεύει την εξίσωση της υπερβολής $C: \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{12} = 1$

$$\text{Όμως: } \frac{8^2}{16} - \frac{(-6)^2}{12} = \frac{64}{16} - \frac{36}{12} = 4 - 3 = 1 \text{ που ισχύει}$$

Άρα το σημείο $M(-6,8)$ ανήκει στην υπερβολή

β) Είναι $\frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1 \xrightarrow[\alpha^2=16, \beta^2=12]{x_1=-6, y_1=8} \frac{8y}{16} + \frac{6x}{12} = 1 \Rightarrow x + y - 2 = 0$

21.5 7)

α) Αρκεί το σημείο $M(-7,0)$ να επαληθεύει την εξίσωση της υπερβολής $C: \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$

$$\text{Όμως: } \frac{(-7)^2}{49} - \frac{0^2}{25} = \frac{49}{49} = 1 \text{ που ισχύει}$$

Άρα το σημείο $M(-7,0)$ ανήκει στην υπερβολή

β) Είναι $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1 \xrightarrow[\alpha^2=49, \beta^2=25]{x_1=-7, y_1=0} \frac{-7x}{49} - \frac{0y}{25} = 1 \Rightarrow x = -7$

21.5 8)

α) Αρκεί το σημείο $M(0,2)$ να επαληθεύει την εξίσωση της υπερβολής $C: \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{20} = 1$

$$\text{Όμως: } \frac{2^2}{4} - \frac{0^2}{20} = 1 \Rightarrow \frac{4}{4} = 1 \text{ που ισχύει}$$

Άρα το σημείο $M(0,2)$ ανήκει στην υπερβολή

β) Είναι $\frac{yy_1}{\alpha^2} - \frac{xx_1}{\beta^2} = 1 \xrightarrow[\alpha^2=4, \beta^2=20]{x_1=0, y_1=2} \frac{2y}{4} - \frac{0x}{20} = 1 \Rightarrow y = 2$