

21.4 1)

α) Γενικά οι εστίες είναι οι $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$ οπότε τώρα που είναι $E'(0, -5)$ και $E(0, 5)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\gamma = 5$. Ακόμη γενικά οι κορυφές είναι οι $A'(0, -\alpha)$ και $A(0, \alpha)$ οπότε τώρα που είναι $A'(0, -4)$ και $A(0, 4)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\alpha = 4$. Τέλος είναι $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow \beta^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow \beta^2 = 25 - 16 \Rightarrow \beta^2 = 9$

Οπότε και επειδή η υπερβολή έχει εστίες στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

β) Γενικά οι κορυφές είναι οι $A'(0, -\alpha)$ και $A(0, \alpha)$ οπότε τώρα που είναι $A'(0, -3)$ και $A(0, 3)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\alpha = 3$. Ακόμη γενικά οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y = \pm \frac{\alpha}{\beta} x$ οπότε τώρα που είναι οι ευθείες $y = \pm \frac{3}{2} x$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{\beta} = \frac{3}{2} \Rightarrow \beta = 2.$$

Προφανώς η υπερβολή έχει εστίες στον άξονα $y'y$ οπότε έχει εξίσωση

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$$

21.4 2)

Γενικά οι εστίες είναι οι $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$ οπότε τώρα που είναι

$E'(0, -6)$ και $E(0, 6)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\gamma = 6$

Ακόμη γενικά οι κορυφές είναι οι $A'(0, -\alpha)$ και $A(0, \alpha)$ οπότε τώρα που είναι

$A'(0, -3)$ και $A(0, 3)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\alpha = 3$

Τέλος είναι $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow \beta^2 = 6^2 - 3^2 \Rightarrow \beta^2 = 27$

Οπότε και επειδή η υπερβολή έχει εστίες στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση :

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$$

21.4 3)

Γενικά οι εστίες είναι οι $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$ οπότε τώρα που είναι

$E'(0, -12)$ και $E(0, 12)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\gamma = 12$

Ακόμη έχουμε $\varepsilon = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{12}{\alpha} = \frac{6}{5} \Rightarrow \alpha = 10$

Τέλος είναι $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow \beta^2 = 12^2 - 10^2 \Rightarrow \beta^2 = 44$

Οπότε και επειδή η υπερβολή έχει εστίες στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση :

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{44} = 1$$

21.4 4)

Γενικά οι εστίες είναι οι $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$ οπότε τώρα που είναι

$E'(0, -8)$ και $E(0, 8)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\gamma = 8$

Επίσης η υπερβολή είναι ισοσκελής, άρα $\alpha = \beta$

$$\text{Τέλος είναι } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow 2\beta^2 = \gamma^2 \Rightarrow \beta^2 = \frac{\gamma^2}{2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{8^2}{2} \Rightarrow \beta^2 = 32 = \alpha^2$$

Οπότε και επειδή η υπερβολή έχει εστίες στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση :

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{32} - \frac{x^2}{32} = 1$$

21.4 5)

Γενικά οι εστίες είναι οι $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$ οπότε τώρα που είναι

$E'(0, -10)$ και $E(0, 10)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\gamma = 10$

Ακόμη γενικά οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y = \pm \frac{\alpha}{\beta} x$

Οπότε τώρα που είναι οι ευθείες $y = \pm 3x$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = 3 \Rightarrow \alpha = 3\beta$$

$$\text{Τέλος είναι } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow \beta^2 = \gamma^2 - (3\beta)^2 \Rightarrow 10\beta^2 = \gamma^2 \Rightarrow \beta^2 = 10 \Rightarrow \alpha^2 = 9\beta^2 = 90$$

Οπότε και επειδή η υπερβολή έχει εστίες στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση :

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{90} - \frac{x^2}{10} = 1$$

21.4 6)

Γενικά οι κορυφές είναι οι $A'(0, -\alpha)$ και $A(0, \alpha)$ οπότε τώρα που είναι

$A'(0, -9)$ και $A(0, 9)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\alpha = 9$

Ακόμη γενικά οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι ευθείες $y = \pm \frac{\alpha}{\beta} x$

Οπότε τώρα που είναι οι ευθείες $y = \pm \frac{3}{4}x$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{9}{\beta} = \frac{3}{4} \Rightarrow \beta = 12$$

Οπότε και επειδή η υπερβολή έχει εστίες στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση :

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{144} = 1$$

21.4 7)

Γενικά οι κορυφές είναι οι $A'(0, -\alpha)$ και $A(0, \alpha)$ οπότε τώρα που είναι

$A'(0, -5)$ και $A(0, 5)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\alpha = 5$

Ακόμη η υπερβολή είναι ισοσκελής, άρα $\alpha = \beta \Rightarrow \beta = 5$

Οπότε και επειδή η υπερβολή έχει εστίες στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση :

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{25} = 1$$

21.4 8)

Γενικά οι κορυφές είναι οι $A'(0, -\alpha)$ και $A(0, \alpha)$ οπότε τώρα που είναι

$A'(0, -3)$ και $A(0, 3)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\alpha = 3$

$$\text{Επίσης είναι : } \varepsilon = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{\gamma}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow \gamma = 5$$

$$\text{Τέλος είναι : } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow \beta^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow \beta^2 = 16$$

Οπότε και επειδή η υπερβολή έχει εστίες στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση :

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$$

21.4 9)

Γενικά οι εστίες είναι οι $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$ οπότε τώρα που είναι

$E'(0, -7)$ και $E(0, 7)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\gamma = 7$

$$\text{Επίσης είναι } \varepsilon = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{7}{\alpha} = \frac{7}{5} \Rightarrow \alpha = 5$$

$$\text{Τέλος είναι } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow \beta^2 = 7^2 - 5^2 \Rightarrow \beta^2 = 24$$

Οπότε και επειδή η υπερβολή έχει εστίες στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση :

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$$

21.4 10)

Γενικά οι εστίες είναι οι $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$ οπότε τώρα που είναι

$E'(0, -4)$ και $E(0, 4)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\gamma = 4$

Επίσης είναι ισοσκελής, άρα $\alpha = \beta$

$$\text{Τέλος είναι } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow 2\beta^2 = \gamma^2 \Rightarrow \beta^2 = \frac{\gamma^2}{2} \Rightarrow \beta^2 = 8 = \alpha^2$$

Οπότε και επειδή η υπερβολή έχει εστίες στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση :

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{8} = 1$$

21.4 11)

Γενικά οι εστίες είναι οι $E'(0, -\gamma)$ και $E(0, \gamma)$ οπότε τώρα που είναι

$E'(0, -13)$ και $E(0, 13)$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\gamma = 13$

Ακόμη γενικά οι ασύμπτωτες είναι οι ευθείες $y = \pm \frac{\alpha}{\beta}x$, οπότε τώρα που είναι οι ευθείες

$$y = \pm \frac{5}{12}x \text{ συμπεραίνουμε ότι ισχύει } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{12} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{12}\beta$$

$$\text{Τέλος είναι } \beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2 \Rightarrow \beta^2 = \gamma^2 - \left(\frac{5}{12}\beta\right)^2 \Rightarrow \beta^2 = \gamma^2 - \frac{25}{144}\beta^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{169}{144}\beta^2 = \gamma^2 \Rightarrow \frac{169}{144}\beta^2 = 169 \Rightarrow \beta^2 = 144$$

$$\text{Και άρα } \alpha^2 = \frac{25}{144}\beta^2 \Rightarrow \alpha^2 = 25$$

Οπότε και επειδή η υπερβολή έχει εστίες στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση :

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$$