

21.15

Κάθε ευθεία παράλληλη προς την ασύμπτωτη $y = \frac{\beta}{\alpha} x$ έχει εξίσωση :

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x + \kappa, \quad \kappa \neq 0$$

Για να βρούμε που τέμνει την υπερβολή, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \\ y = \kappa + \frac{\beta}{\alpha} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{\left(\kappa + \frac{\beta}{\alpha} x\right)^2}{\beta^2} = 1 \\ y = \kappa + \frac{\beta}{\alpha} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{\kappa^2 + \frac{2\kappa\beta}{\alpha} x + \frac{\beta^2 x^2}{\alpha^2}}{\beta^2} = 1 \\ y = \kappa + \frac{\beta}{\alpha} x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{\kappa^2}{\beta^2} - \frac{2\kappa}{\alpha\beta} x - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 \\ y = \kappa + \frac{\beta}{\alpha} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\kappa x}{\alpha\beta} + \frac{\kappa^2}{\beta^2} = 1 \\ y = \kappa + \frac{\beta}{\alpha} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha\beta\left(1 - \frac{\kappa^2}{\beta^2}\right)}{2\kappa} \\ y = \kappa + \frac{\beta}{\alpha} x \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση