

20.9 1)

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο της έλλειψης στο οποίο η εφαπτόμενη διέρχεται από το σημείο $K(0, 5)$.

Η εφαπτόμενη της έλλειψης στο M έχει εξίσωση εφ: $\frac{xx_1}{15} + \frac{yy_1}{10} = 1 \Rightarrow \text{εφ: } 2xx_1 + 3yy_1 - 30 = 0 \quad (1)$.

Απομένει να βρούμε τα x_1 και y_1 . Όμως

– η παραπάνω εφαπτόμενη διέρχεται από το σημείο $K(0, 5)$ που σημαίνει ότι το K επαληθεύει την εξίσωση (1) άρα θα ισχύει $2 \cdot 0 \cdot x_1 + 3 \cdot 5 \cdot y_1 - 30 = 0 \Leftrightarrow 15y_1 = 30 \Rightarrow y_1 = 2$

– επειδή το M είναι σημείο της έλλειψης θα επαληθεύει την εξίσωση της έλλειψης άρα θα ισχύει

$$\frac{x_1^2}{15} + \frac{y_1^2}{10} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{15} + \frac{2^2}{10} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{15} + \frac{4}{10} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{15} + \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow x_1^2 + 6 = 15 \Rightarrow x_1^2 = 9 \Rightarrow x_1 = \pm 3$$

Για $x_1 = -3$ και $y_1 = 2$ η ζητούμενη εφαπτόμενη έχει εξίσωση

$$(1) \xrightarrow{x_1=-3, y_1=2} 2x(-3) + 3y \cdot 2 - 30 = 0 \Rightarrow -6x + 6y - 30 = 0 \Rightarrow x - y + 5 = 0$$

Για $x_1 = 3$ και $y_1 = 2$ η ζητούμενη εφαπτόμενη έχει εξίσωση

$$(1) \xrightarrow{x_1=3, y_1=2} 2x \cdot 3 + 3y \cdot 2 - 30 = 0 \Rightarrow 6x + 6y - 30 = 0 \Rightarrow x + y - 5 = 0$$

20.9 2)

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο της έλλειψης στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $K(0, 6)$. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο M έχει εξίσωση :

$$\text{εφ: } \frac{xx_1}{6} + \frac{yy_1}{30} = 1 \Rightarrow 5xx_1 + yy_1 = 30 \quad (1)$$

Απομένει να βρούμε τα x_1 και y_1

Όμως η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $K(0, 6)$ που σημαίνει ότι το K επαληθεύει την εξίσωση (1), άρα θα ισχύει : $5 \cdot 0 \cdot x_1 + 6y_1 = 30 \Rightarrow y_1 = 5$

Επειδή το M είναι σημείο της έλλειψης, θα επαληθεύει την εξίσωση της έλλειψης, άρα θα ισχύει :

$$\frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{30} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{6} + \frac{5^2}{30} = 1 \Rightarrow x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1$$

Για $x_1 = 1$ και $y_1 = 5$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow 5x + 5y = 30 \Rightarrow x + y - 6 = 0$$

Για $x_1 = -1$ και $y_1 = 5$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow -5x + 5y = 30 \Rightarrow x - y + 6 = 0$$

20.9 3)

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο της έλλειψης στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $K(0, 7)$. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο M έχει εξίσωση :

$$\text{εφ: } \frac{xx_1}{35} + \frac{yy_1}{14} = 1 \quad (1)$$

Απομένει να βρούμε τα x_1 και y_1

Όμως η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $K(0,7)$ που σημαίνει ότι το K επαληθεύει

$$\text{την εξίσωση (1), άρα θα ισχύει: } \frac{0 \cdot x_1}{35} + \frac{7y_1}{14} = 1 \Rightarrow y_1 = 2$$

Επειδή το M είναι σημείο της έλλειψης, θα επαληθεύει την εξίσωση της έλλειψης, άρα θα ισχύει:

$$\frac{x_1^2}{35} + \frac{y_1^2}{14} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{35} + \frac{2^2}{14} = 1 \Rightarrow x_1^2 = 25 \Rightarrow x_1 = \pm 5$$

Για $x_1 = 5$ και $y_1 = 2$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$(1) \Rightarrow \frac{5x}{35} + \frac{2y}{14} = 1 \Rightarrow x + y - 7 = 0$$

Για $x_1 = -5$ και $y_1 = 2$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$(1) \Rightarrow \frac{-5x}{35} + \frac{2y}{14} = 1 \Rightarrow -x + y - 7 = 0$$

20.9 4)

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο της έλλειψης στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο

$K(0,8)$. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο M έχει εξίσωση:

$$\text{εφ: } \frac{xx_1}{40} + \frac{yy_1}{24} = 1 \quad (1)$$

Απομένει να βρούμε τα x_1 και y_1

Όμως η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $K(0,8)$ που σημαίνει ότι το K επαληθεύει

$$\text{την εξίσωση (1), άρα θα ισχύει: } \frac{8 \cdot x_1}{40} + \frac{0 \cdot y_1}{24} = 1 \Rightarrow x_1 = 5$$

Επειδή το M είναι σημείο της έλλειψης, θα επαληθεύει την εξίσωση της έλλειψης, άρα θα ισχύει:

$$\frac{x_1^2}{40} + \frac{y_1^2}{24} = 1 \Rightarrow \frac{5^2}{40} + \frac{y_1^2}{24} = 1 \Rightarrow y_1^2 = 9 \Rightarrow y_1 = \pm 3$$

Για $y_1 = 3$ και $x_1 = 5$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$(1) \Rightarrow \frac{5x}{40} + \frac{3y}{24} = 1 \Rightarrow x + y - 8 = 0$$

Για $y_1 = -3$ και $x_1 = 5$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$(1) \Rightarrow \frac{5x}{40} - \frac{3y}{24} = 1 \Rightarrow x - y - 8 = 0$$

20.9 5)

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο της έλλειψης στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο

$K(-4,0)$. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο M έχει εξίσωση:

$$\text{εφ: } \frac{xx_1}{8} + \frac{yy_1}{50} = 1 \quad (1)$$

Απομένει να βρούμε τα x_1 και y_1

Όμως η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $K(-4,0)$ που σημαίνει ότι το K

$$\text{επαληθεύει την εξίσωση (1), άρα θα ισχύει: } \frac{-4 \cdot x_1}{8} + \frac{0 \cdot y_1}{50} = 1 \Rightarrow x_1 = -2$$

Επειδή το M είναι σημείο της έλλειψης, θα επαληθεύει την εξίσωση της έλλειψης, άρα θα ισχύει:

$$\frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{50} = 1 \Rightarrow \frac{(-2)^2}{8} + \frac{y_1^2}{50} = 1 \Rightarrow y_1^2 = 25 \Rightarrow y_1 = \pm 5$$

Για $y_1 = 5$ και $x_1 = -2$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow \frac{-2x}{8} + \frac{5y}{50} = 1 \Rightarrow 5x - 2y + 20 = 0$$

Για $y_1 = -5$ και $x_1 = -2$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow \frac{-2x}{8} - \frac{5y}{50} = 1 \Rightarrow 5x + 2y + 20 = 0$$

20.9 6)

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο της έλλειψης στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $K(-3, 0)$. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο M έχει εξίσωση :

$$\text{εφ: } \frac{xx_1}{6} + \frac{yy_1}{48} = 1 \quad (1)$$

Απομένει να βρούμε τα x_1 και y_1

Όμως η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $K(-3, 0)$ που σημαίνει ότι το K

επαληθεύει την εξίσωση (1), άρα θα ισχύει : $\frac{-3 \cdot x_1}{6} + \frac{0 \cdot y_1}{48} = 0 \Rightarrow x_1 = -2$

Επειδή το M είναι σημείο της έλλειψης, θα επαληθεύει την εξίσωση της έλλειψης, άρα θα ισχύει : $8x_1^2 + y_1^2 = 48 \Rightarrow 8(-2)^2 + y_1^2 = 48 \Rightarrow y_1^2 = 16 \Rightarrow y_1 = \pm 4$

Για $y_1 = 4$ και $x_1 = -2$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow \frac{-2x}{6} + \frac{4y}{48} = 1 \Rightarrow -\frac{x}{3} + \frac{y}{12} = 1 \Rightarrow 4x - y + 12 = 0$$

Για $y_1 = -4$ και $x_1 = -2$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow \frac{-2x}{6} - \frac{4y}{48} = 1 \Rightarrow 4x + y + 12 = 0$$