

20.8 1)

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο της έλλειψης στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 9 = 0$. Η έλλειψη έχει εξίσωση $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ οπότε η εφαπτόμενη της έλλειψης στο M έχει εξίσωση εφ: $\frac{xx_1}{2} + \frac{yy_1}{8} = 1 \Rightarrow 4xx_1 + yy_1 = 8 \Rightarrow$ εφ: $4xx_1 + yy_1 - 8 = 0$ (1). Απομένει να βρούμε τα x_1 και y_1 . Όμως

– η παραπάνω εφαπτόμενη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{4x_1}{y_1}$. Οπότε για να είναι

παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 9 = 0$ (που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = -2$) θα

$$\text{πρέπει } \lambda_{\varepsilon\varphi} = \lambda_\varepsilon \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = -2 \Rightarrow -\frac{4x_1}{y_1} = -2 \Rightarrow y_1 = 2x_1$$

– επειδή το M είναι σημείο της έλλειψης θα επαληθεύει την εξίσωση της έλλειψης άρα θα ισχύει

$$4x_1^2 + y_1^2 = 8 \xrightarrow{y_1=2x_1} 4x_1^2 + (2x_1)^2 = 8 \Rightarrow 4x_1^2 + 4x_1^2 = 8 \Rightarrow 8x_1^2 = 8 \Rightarrow x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1$$

Για $x_1 = 1$ είναι $y_1 = 2 \cdot 1 \Rightarrow y_1 = 2$ και η ζητούμενη εφαπτόμενη έχει εξίσωση

$$(1) \xrightarrow{x_1=1, y_1=2} 4x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow 2x + y - 4 = 0$$

Για $x_1 = -1$ είναι $y_1 = 2 \cdot (-1) \Rightarrow y_1 = -2$ και η ζητούμενη εφαπτόμενη έχει εξίσωση

$$(1) \xrightarrow{x_1=-1, y_1=-2} -4x - 2y - 8 = 0 \Rightarrow 2x + y + 4 = 0$$

20.8 2)

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο της έλλειψης στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: x + 2y + 11 = 0$

Η εφαπτομένη της έλλειψης στο M έχει εξίσωση :

$$\text{εφ: } \frac{xx_1}{12} + \frac{yy_1}{6} = 1 \Rightarrow \text{εφ: } xx_1 + 2yy_1 = 12 \Rightarrow xx_1 + 2yy_1 - 12 = 0 \quad (1)$$

Απομένει να βρούμε τα x_1 και y_1

Όμως η παραπάνω εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{x_1}{2y_1}$

Οπότε για να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: x + 2y + 11 = 0$ (που έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{2}) \text{ θα πρέπει } \lambda_{\varepsilon\varphi} = \lambda_\varepsilon \Rightarrow -\frac{x_1}{2y_1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_1 = x_1$$

Επειδή το M είναι σημείο της έλλειψης, θα επαληθεύει την εξίσωση της έλλειψης, άρα θα ισχύει :

$$\frac{x_1^2}{12} + \frac{y_1^2}{6} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{12} + \frac{(x_1)^2}{6} = 1 \Rightarrow 3x_1^2 = 12 \Rightarrow x_1^2 = 4 \Rightarrow x_1 = \pm 2$$

Για $x_1 = 2$ είναι $y_1 = x_1 \Rightarrow y_1 = 2$ και η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow 2x + 4y = 12 \Rightarrow x + 2y - 6 = 0$$

Για $x_1 = -2$ είναι $y_1 = x_1 \Rightarrow y_1 = -2$ και η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow -2x - 4y = 12 \Rightarrow x + 2y + 6 = 0$$

20.8 3)

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο της έλλειψης στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y = x$

Η εφαπτομένη της έλλειψης στο M έχει εξίσωση : εφ: $\frac{xx_1}{16} + \frac{yy_1}{9} = 1$ (1)

Απομένει να βρούμε τα x_1 και y_1

Όμως η παραπάνω εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\text{εφ}} = -\frac{9x_1}{16y_1}$

Οπότε για να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: x = y$ (που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon} = 1$) θα

$$\text{πρέπει } \lambda_{\text{εφ}} = \lambda_{\varepsilon} \Rightarrow -\frac{9x_1}{16y_1} = 1 \Rightarrow y_1 = -\frac{9x_1}{16}$$

Επειδή το M είναι σημείο της έλλειψης, θα επαληθεύει την εξίσωση της έλλειψης, άρα θα ισχύει:

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{\left(\frac{9x_1}{16}\right)^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{25x_1^2}{256} = 1 \Rightarrow x_1 = \pm \frac{16}{5}$$

Για $x_1 = \frac{16}{5}$ είναι $y_1 = -\frac{9x_1}{16} = -\frac{9 \cdot \frac{16}{5}}{16} = -\frac{9}{5}$ και η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$(1) \Rightarrow \frac{x \cdot \frac{16}{5}}{16} + \frac{y \cdot \frac{9}{5}}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x}{5} - \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow x - y - 5 = 0$$

Για $x_1 = -\frac{16}{5}$ είναι $y_1 = \frac{9}{5}$ και η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$(1) \Rightarrow -\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow x - y + 5 = 0$$

20.8 4)

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο της έλλειψης στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x - 3y + 1 = 0$

Η εφαπτομένη της έλλειψης στο M έχει εξίσωση: $\text{εφ}: \frac{xx_1}{3} + \frac{yy_1}{9} = 1$ (1)

Απομένει να βρούμε τα x_1 και y_1

Όμως η παραπάνω εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\text{εφ}} = -\frac{\frac{x_1}{3}}{\frac{y_1}{9}} = -\frac{3x_1}{y_1}$

Οπότε για να είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x - 3y + 1 = 0$ (που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon} = \frac{1}{3}$)

$$\text{θα πρέπει } \lambda_{\text{εφ}} = -\frac{1}{\lambda_{\varepsilon}} \Rightarrow -\frac{3x_1}{y_1} = -3 \Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = 1 \Rightarrow x_1 = y_1$$

Επειδή το M είναι σημείο της έλλειψης, θα επαληθεύει την εξίσωση της έλλειψης, άρα θα ισχύει:

$$\frac{x_1^2}{3} + \frac{y_1^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{3} + \frac{x_1^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{4x_1^2}{9} = 1 \Rightarrow x_1 = \pm \frac{3}{2}$$

Για $x_1 = \frac{3}{2}$ είναι $y_1 = x_1 \Rightarrow y_1 = \frac{3}{2}$ και η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$(1) \Rightarrow \frac{x \cdot \frac{3}{2}}{3} + \frac{y \cdot \frac{3}{2}}{9} = 1 \Rightarrow 3x + y = 6$$

Για $x_1 = -\frac{3}{2}$ είναι $y_1 = x_1 \Rightarrow y_1 = -\frac{3}{2}$ και η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$$(1) \Rightarrow -\frac{x \cdot \frac{3}{2}}{3} - \frac{y \cdot \frac{3}{2}}{9} = 1 \Rightarrow -3x - y = 6$$

20.8 5)

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο της έλλειψης στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 4x - 2y + 5 = 0$

Η εφαπτομένη της έλλειψης στο Μ έχει εξίσωση : εφ : $\frac{xx_1}{30} + \frac{yy_1}{24} = 1$ (1)

Απομένει να βρούμε τα x_1 και y_1

Όμως η παραπάνω εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon\varphi} = \frac{-\frac{x_1}{30}}{\frac{y_1}{24}} = -\frac{12x_1}{15y_1}$

Οπότε για να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : 4x - 2y + 5 = 0$ (που έχει συντελεστή

διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = 2$) θα πρέπει $\lambda_{\varepsilon\varphi} = \lambda_\varepsilon \Rightarrow -\frac{12x_1}{15y_1} = 2 \Rightarrow y_1 = -\frac{12x_1}{30}$

Επειδή το Μ είναι σημείο της έλλειψης, θα επαληθεύει την εξίσωση της έλλειψης, άρα θα ισχύει :

$$\frac{x_1^2}{30} + \frac{y_1^2}{24} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{30} + \frac{\left(-\frac{12x_1}{30}\right)^2}{24} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{25} = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 5$$

Για $x_1 = 5$ είναι $y_1 = -\frac{12 \cdot 5}{30} = -2$ και η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow \frac{x \cdot 5}{30} + \frac{y(-2)}{24} = 1 \Rightarrow \frac{x}{6} - \frac{y}{12} = 1 \Rightarrow 2x - y - 12 = 0$$

Για $x_1 = -5$ είναι $y_1 = \frac{-12(5)}{30} = 2$ και η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow \frac{-x \cdot 5}{30} + \frac{2y}{24} = 1 \Rightarrow -\frac{x}{6} + \frac{y}{12} = 1 \Rightarrow 2x - y + 12 = 0$$

20.8 6)

Έστω $M(x_1, y_1)$ το σημείο της έλλειψης στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon : 3x - 3y + 7 = 0$

Η εφαπτομένη της έλλειψης στο Μ έχει εξίσωση : εφ : $\frac{xx_1}{20} + \frac{yy_1}{5} = 1$ (1)

Απομένει να βρούμε τα x_1 και y_1

Όμως η παραπάνω εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon\varphi} = \frac{-\frac{x_1}{20}}{\frac{y_1}{5}} = -\frac{x_1}{4y_1}$

Οπότε για να είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon : x - 3y + 1 = 0$ (που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = 1$)

θα πρέπει $\lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = -1 \Rightarrow \frac{-x_1}{4y_1} = -1 \Rightarrow y_1 = \frac{x_1}{4}$

Επειδή το Μ είναι σημείο της έλλειψης, θα επαληθεύει την εξίσωση της έλλειψης, άρα θα ισχύει :

$$x_1^2 + 4y_1^2 = 20 \Rightarrow x_1^2 + 4\left(\frac{x_1}{4}\right)^2 = 20 \Rightarrow 5x_1^2 = 80 \Rightarrow x_1^2 = 16 \Rightarrow x_1 = \pm 4$$

Για $x_1 = 4$ είναι $y_1 = \frac{x_1}{4} = 1$ και η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow \frac{4x}{20} + \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow 4x + 4y = 20 \Rightarrow x + y - 5 = 0$$

Για $x_1 = -4$ είναι $y_1 = -\frac{4}{4} = -1$ και η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow -\frac{4x}{20} - \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow -4x - 4y = 20 \Rightarrow x + y + 5 = 0$$