

19.7 1)

Έστω $B(\alpha, \beta)$ το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτόμενη διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$.

Η εφαπτόμενη της παραβολής στο B έχει εξίσωση

εφ: $xx_1 = p(y + y_1)$ $\xrightarrow{x_1=\alpha, y_1=\beta, p=2}$ εφ: $x\alpha = 2(y + \beta) \Rightarrow$ εφ: $\alpha x - 2y - 2\beta = 0$ (1). Απομένει να βρούμε τα α και β . Έτσι έχουμε ότι

– η παραπάνω εφαπτόμενη διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$ που σημαίνει ότι το A επαληθεύει την εξίσωση (1) άρα θα ισχύει $\alpha \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 2\beta = 0 \Leftrightarrow 3\alpha - 2\beta = 4$ (2)

– επειδή το B είναι σημείο της παραβολής θα επαληθεύει την εξίσωση της παραβολής άρα θα ισχύει $\alpha^2 = 4\beta$ (3)

Λύνουμε τώρα το σύστημα των (2) και (3)

$$\begin{cases} 3\alpha - 2\beta = 4 \\ \alpha^2 = 4\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - 2\frac{\alpha^2}{4} = 4 \\ \beta = \frac{\alpha^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha - \frac{\alpha^2}{2} = 4 \\ \beta = \frac{\alpha^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\alpha - \alpha^2 = 8 \\ \beta = \frac{\alpha^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \alpha^2 - 6\alpha + 8 = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \text{ ή } \alpha = 4$$

Για $\alpha = 2$ είναι $\beta = \frac{2^2}{4} = 1$ και η ζητούμενη εφαπτόμενη έχει εξίσωση

$$(1) \xrightarrow{\alpha=2, \beta=1} 2x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow x - y - 1 = 0$$

Για $\alpha = 4$ είναι $\beta = \frac{4^2}{4} = 4$ και η ζητούμενη εφαπτόμενη έχει εξίσωση

$$(1) \xrightarrow{\alpha=4, \beta=4} 4x - 2y - 8 = 0 \Rightarrow 2x - y - 4 = 0$$

19.7 2)

Έστω $B(\alpha, \beta)$ το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(5, 6)$. Η εφαπτομένη της παραβολής στο B έχει εξίσωση :

$$\text{εφ: } yy_1 = p(x + x_1) \xrightarrow{p=2, x_1=\alpha, y_1=\beta}$$

$$\text{εφ: } \beta y = 2(x + \alpha) \Rightarrow \text{εφ: } 2x - \beta y + 2\alpha = 0 \quad (1)$$

Απομένει να βρούμε τα α και β . Έτσι έχουμε ότι η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(5, 6)$ που σημαίνει ότι το A επαληθεύει την εξίσωση (1), άρα ισχύει :

$$2 \cdot 5 - 6\beta + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 10 - 6\beta + 2\alpha = 0 \quad (2)$$

Επειδή το B είναι σημείο της παραβολής θα επαληθεύει την εξίσωση της παραβολής, άρα θα ισχύει : $\beta^2 = 4\alpha$ (3)

Λύνοντας το σύστημα των (2), (3) βρίσκουμε :

$$\alpha = 1 \text{ και } \beta = 2 \quad \text{ή} \quad \alpha = 25 \text{ και } \beta = 10$$

Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow 2x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

Για $\alpha = 25$ και $\beta = 10$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow 2x - 10y + 50 = 0 \Rightarrow x - 5y + 25 = 0$$

19.7 3)

Έστω $B(\alpha, \beta)$ το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$. Η εφαπτομένη της παραβολής στο B έχει εξίσωση :

$$\text{εφ: } xx_1 = \rho(y + y_1) \quad \rho = -2, x_1 = \alpha, y_1 = \beta \Rightarrow$$

$$\text{εφ: } \alpha x = -2(y + \beta) \Rightarrow \text{εφ: } \alpha x + 2y + 2\beta = 0 \quad (1)$$

Απομένει να βρούμε τα α και β . Έτσι έχουμε ότι η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ που σημαίνει ότι το A επαληθεύει την εξίσωση (1), άρα ισχύει :

$$x + 4 + 2\beta = 0 \quad (2)$$

Επειδή το B είναι σημείο της παραβολής θα επαληθεύει την εξίσωση της παραβολής, άρα θα ισχύει : $\alpha^2 = -4\beta$ (3)

Λύνοντας το σύστημα των (2), (3) βρίσκουμε :

$$\alpha = 4 \text{ και } \beta = -4 \quad \text{ή} \quad \alpha = -2 \text{ και } \beta = -1$$

Για $\alpha = 4$ και $\beta = -4$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow 4x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow 2x + y - 4 = 0$$

Για $\alpha = -2$ και $\beta = -1$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow -2x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

19.7 4)

Έστω $B(\alpha, \beta)$ το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$. Η εφαπτομένη της παραβολής στο B έχει εξίσωση :

$$\text{εφ: } xx_1 = \rho(y + y_1) \quad \rho = 2, x_1 = \alpha, y_1 = \beta \Rightarrow$$

$$\text{εφ: } \alpha x = 2(y + \beta) \Rightarrow \text{εφ: } \alpha x - 2y - 2\beta = 0 \quad (1)$$

Απομένει να βρούμε τα α και β . Έτσι έχουμε ότι η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$ που σημαίνει ότι το A επαληθεύει την εξίσωση (1), άρα ισχύει :

$$0 \cdot \alpha - 2(-1) - 2\beta = 0 \Leftrightarrow 2 - 2\beta = 0 \quad (2)$$

Επειδή το B είναι σημείο της παραβολής θα επαληθεύει την εξίσωση της παραβολής,

$$\text{άρα θα ισχύει : } \beta = \frac{1}{4}\alpha^2 \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε :

$$\alpha = -2 \text{ και } \beta = 1 \quad \text{ή} \quad \alpha = 2 \text{ και } \beta = 1$$

Για $\alpha = -2$ και $\beta = 1$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow -2x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = -x - 1$$

Για $\alpha = 2$ και $\beta = 1$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow 2x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = x - 1$$

19.7 5)

Έστω $B(\alpha, \beta)$ το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$. Η εφαπτομένη της παραβολής στο B έχει εξίσωση :

$$\text{εφ} : xx_1 = \rho(y + y_1) \quad \rho=1, x_1=\alpha, y_1=\beta \Rightarrow$$

$$\text{εφ} : \alpha x = (y + \beta) \Rightarrow \text{εφ} : \alpha x - y - \beta = 0 \quad (1)$$

Απομένει να βρούμε τα α και β . Έτσι έχουμε ότι η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$ που σημαίνει ότι το A επαληθεύει την εξίσωση (1), άρα ισχύει :

$$\alpha + 4 - \beta = 0 \quad (2)$$

Επειδή το B είναι σημείο της παραβολής θα επαληθεύει την εξίσωση της παραβολής, άρα θα ισχύει : $\alpha^2 = 2\beta \quad (3)$

Λύνοντας το σύστημα των (2), (3) βρίσκουμε :

$$\alpha = -2 \text{ και } \beta = 2 \quad \text{ή} \quad \alpha = 4 \text{ και } \beta = 8$$

Για $\alpha = 4$ και $\beta = 8$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow 4x - y - 8 = 0$$

Για $\alpha = -2$ και $\beta = 2$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow -2x - y - 2 = 0 \Rightarrow 2x + y + 2 = 0$$

19.7 6)

Έστω $B(\alpha, \beta)$ το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(-2, 4)$. Η εφαπτομένη της παραβολής στο B έχει εξίσωση :

$$\text{εφ} : yy_1 = \rho(x + x_1) \quad \rho=-3, x_1=\alpha, y_1=\beta \Rightarrow$$

$$\text{εφ} : \beta y = -3(x + \alpha) \Rightarrow \text{εφ} : 3x + \beta y + 3\alpha = 0 \quad (1)$$

Απομένει να βρούμε τα α και β . Έτσι έχουμε ότι η παραπάνω εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(-2, 4)$ που σημαίνει ότι το A επαληθεύει την εξίσωση (1), άρα ισχύει :

$$-6 + 4\beta + 3\alpha = 0 \quad (2)$$

Επειδή το B είναι σημείο της παραβολής θα επαληθεύει την εξίσωση της παραβολής, άρα θα ισχύει : $\beta^2 = -6\alpha \quad (3)$

Λύνοντας το σύστημα των (2), (3) βρίσκουμε :

$$\alpha = -6 \text{ και } \beta = 6 \quad \text{ή} \quad \alpha = -\frac{2}{3} \text{ και } \beta = 2$$

Για $\alpha = -6$ και $\beta = 6$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow 3x + 6y - 18 = 0 \Rightarrow x + 2y - 6 = 0$$

Για $\alpha = -\frac{2}{3}$ και $\beta = 2$ η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$(1) \Rightarrow 3x + 2y + 3\left(-\frac{2}{3}\right) = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 2 = 0$$