

19.6 1)

Έστω $A(\alpha, \beta)$ το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτόμενη είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 4x - 2y + 1 = 0$. Η εφαπτόμενη της παραβολής στο A έχει εξίσωση

εφ: $yy_1 = p(x + x_1)$ $\xrightarrow{x_1=\alpha, y_1=\beta, p=1}$ εφ: $y \cdot \beta = x + \alpha \Rightarrow$ εφ: $x - \beta y + \alpha = 0$ (1). Απομένει να βρούμε τα α και β . Έτσι έχουμε ότι

– η παραπάνω εφαπτόμενη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon\phi} = \frac{1}{\beta}$. Οπότε για να είναι κάθετη στην

ευθεία $\varepsilon: 4x + 2y + 1 = 0$ (που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon} = -\frac{A}{B} = -\frac{4}{2} = -2$) θα πρέπει

$$\lambda_{\varepsilon\phi} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Rightarrow \frac{1}{\beta} \cdot (-2) = -1 \Rightarrow \beta = 2$$

– επειδή το A είναι σημείο της παραβολής θα επαληθεύει την εξίσωση της παραβολής άρα θα

$$\text{ισχύει } \beta^2 = 2\alpha \xrightarrow{\beta=2} 2^2 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 2$$

Οπότε η ζητούμενη εφαπτόμενη είναι (1) $\xrightarrow{\alpha=2, \beta=2}$ εφ: $x - 2y + 2 = 0$

19.6 2)

Έστω $A(\alpha, \beta)$ το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη έχει συντελεστή

διεύθυνσης $\lambda = 1$

Η εφαπτομένη στο A έχει εξίσωση :

$$\text{εφ: } yy_1 = p(x + x_1) \xrightarrow{y_1=\beta, x_1=\alpha, p=2} \beta y = 2(x + \alpha) \Rightarrow \beta y = 2x + 2\alpha \Rightarrow 2x - \beta y + 2\alpha = 0 \quad (1)$$

Η παραπάνω εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης : $\lambda = 1$ άρα : $-\frac{A}{B} = 1 \Rightarrow \frac{-2}{-\beta} = 1 \Rightarrow \beta = 2$

Επειδή το A είναι σημείο της παραβολής θα επαληθεύει την εξίσωσή της , άρα θα ισχύει :

$$\beta^2 = 4\alpha \xrightarrow{\beta=2} 4 = 4\alpha \Rightarrow \alpha = 1$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι :

$$(1) \xrightarrow{\alpha=1, \beta=2} 2x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

19.6 3)

Έστω $A(\alpha, \beta)$ το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -4$

Η εφαπτομένη στο A έχει εξίσωση :

$$\text{εφ: } xx_1 = p(y + y_1) \xrightarrow{x_1=\alpha, y_1=\beta, p=-1} \alpha x = -(y + \beta) \Rightarrow \alpha x + y + \beta = 0 \quad (1)$$

Η παραπάνω εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -4$

$$\text{Άρα } -\frac{A}{B} = -4 \Rightarrow -\frac{\alpha}{1} = -4 \Rightarrow \alpha = 4$$

Επειδή το A είναι σημείο της παραβολής θα επαληθεύει την εξίσωση της , άρα

$$\text{θα ισχύει : } \alpha^2 = -2\beta \xrightarrow{\alpha=4} 16 = -2\beta \Rightarrow \beta = -8$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη είναι

$$(1) \xrightarrow{\alpha=4, \beta=-8} 4x + y - 8 = 0 \Rightarrow y = -4x + 8$$

19.6 4)

Έστω $A(\alpha, \beta)$ το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $x - y + 5 = 0$

Η εφαπτομένη της παραβολής στο A έχει εξίσωση :

$$yy_1 = \rho(x + x_1) \quad x_1 = \alpha, y_1 = \beta, \rho = 4 \Rightarrow \beta y = 4x + 4\alpha \Rightarrow 4x - \beta y + 4\alpha = 0 \quad (1)$$

Η εφαπτομένη αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\text{εφ}} = \frac{4}{\beta}$

Οπότε για να είναι παράλληλη στην $\varepsilon : x - y + 5 = 0$ θα πρέπει :

$$\lambda_{\text{εφ}} = \lambda_{\varepsilon} \Rightarrow \frac{4}{\beta} = 1 \Rightarrow \beta = 4$$

Επειδή το A είναι σημείο της παραβολής θα επαληθεύει την εξίσωση της ,

$$\text{άρα θα ισχύει : } \beta^2 = 8\alpha \Rightarrow 16 = 8\alpha \Rightarrow \alpha = 2$$

Οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η

$$(1) \quad \alpha = 2, \beta = 4 \Rightarrow 4x - 4y + 8 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$$

19.6 5)

Έστω $A(\alpha, \beta)$ το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $x - 4y + 7 = 0$

Η εφαπτομένη της παραβολής στο A έχει εξίσωση :

$$yy_1 = \rho(x + x_1) \quad x_1 = \alpha, y_1 = \beta, \rho = 3 \Rightarrow \beta y = 3(x + \alpha) \Rightarrow 3x - \beta y + 3\alpha = 0 \quad (1)$$

Η εφαπτομένη αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\text{εφ}} = \frac{3}{\beta}$

Οπότε για να είναι παράλληλη στην $\varepsilon : x - 4y + 7 = 0$ θα πρέπει :

$$\lambda_{\text{εφ}} = \lambda_{\varepsilon} \Rightarrow \frac{3}{\beta} = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta = 12$$

Επειδή το A είναι σημείο της παραβολής θα επαληθεύει την εξίσωση της ,

$$\text{άρα θα ισχύει : } \beta^2 = 6\alpha \Rightarrow 144 = 6\alpha \Rightarrow \alpha = 24$$

Οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η

$$(1) \quad \alpha = 24, \beta = 12 \Rightarrow 3x - 12y + 3 \cdot 24 = 0 \Rightarrow x - 4y + 24 = 0$$

19.6 6)

Έστω $A(\alpha, \beta)$ το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $2x - y + 6 = 0$

Η εφαπτομένη της παραβολής στο A έχει εξίσωση :

$$xx_1 = \rho(y + y_1) \quad x_1 = \alpha, y_1 = \beta, \rho = 1 \Rightarrow \alpha x - y - \beta = 0 \quad (1)$$

Η εφαπτομένη αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\text{εφ}} = \alpha$

Οπότε για να είναι παράλληλη στην $\varepsilon : 2x - y + 6 = 0$ θα πρέπει :

$$\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\text{εφ}} \Rightarrow \alpha = 2$$

Επειδή το A είναι σημείο της παραβολής θα επαληθεύει την εξίσωση της ,

$$\text{άρα θα ισχύει : } \alpha^2 = 2\beta \Rightarrow 4 = 2\beta \Rightarrow \beta = 2$$

Οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η

$$(1) \stackrel{\alpha=2, \beta=2}{\Rightarrow} 2x - y - 2 = 0$$

19.6 7)

Έστω $A(\alpha, \beta)$ το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $y = 2x + 9$

Η εφαπτομένη της παραβολής στο A έχει εξίσωση :

$$yy_1 = \rho(x + x_1) \stackrel{x_1=\alpha, y_1=\beta, \rho=-2}{\Rightarrow} -2x - \beta y - 2\alpha = 0 \quad (1)$$

Η εφαπτομένη αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\text{εφ}} = \frac{-2}{\beta}$

Οπότε για να είναι παράλληλη στην $\varepsilon: y = 2x + 9$ θα πρέπει :

$$-\frac{1}{\lambda_{\varepsilon}} = \lambda_{\text{εφ}} \Rightarrow -\frac{2}{\beta} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 4$$

Επειδή το A είναι σημείο της παραβολής θα επαληθεύει την εξίσωση της ,

$$\text{άρα θα ισχύει : } \beta^2 = -4\alpha \stackrel{\beta=4}{\Rightarrow} \alpha = -4$$

Οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η

$$(1) \stackrel{\alpha=-4, \beta=4}{\Rightarrow} -2x - 4y + 8 = 0 \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$$

19.6 8)

Έστω $A(\alpha, \beta)$ το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $x - 4y + 1 = 0$

Η εφαπτομένη της παραβολής στο A έχει εξίσωση :

$$xx_1 = \rho(y + y_1) \stackrel{x_1=\alpha, y_1=\beta, \rho=-\frac{1}{4}}{\Rightarrow} \alpha x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}\beta = 0 \quad (1)$$

Η εφαπτομένη αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\text{εφ}} = -4\alpha$

Οπότε για να είναι κάθετη στην $\varepsilon: x - 4y + 1 = 0$ θα πρέπει :

$$\lambda_{\text{εφ}} = -\frac{1}{\lambda_{\varepsilon}} \Rightarrow -4\alpha = -\frac{1}{\frac{1}{4}} \Rightarrow \alpha = 1$$

Επειδή το A είναι σημείο της παραβολής θα επαληθεύει την εξίσωση της ,

$$\text{άρα θα ισχύει : } \alpha^2 = -\frac{1}{2}\beta \stackrel{\alpha=1}{\Rightarrow} 1 = -\frac{1}{2}\beta \Rightarrow \beta = -2$$

Οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η

$$(1) \stackrel{\alpha=1, \beta=-2}{\Rightarrow} x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 4x + y - 2 = 0$$