

19.25

Αρχικά θα βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των δύο παραβολών ,
Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους :

$$\begin{cases} y^2 = 2\rho x \\ x^2 = 2\rho y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{2\rho} \\ \left(\frac{y^2}{2\rho}\right)^2 = 2\rho y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{2\rho} \\ \frac{y^4}{4\rho^2} = 2\rho y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{2\rho} \\ y^4 = 8\rho^3 y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{2\rho} \\ y(y^3 - 8\rho^3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{2\rho} \\ y = 0 \text{ ή } y = 2\rho \end{cases}$$

Για $y = 0$ είναι $x = 0$ ($O(0,0)$)

Για $y = 2\rho$ είναι $x = 2\rho$ ($A(2\rho, 2\rho)$)

Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2\rho x$ στο $A(2\rho, 2\rho)$ έχει εξίσωση :

$$\varepsilon_1 : yy_1 = \rho(x + x_1) \Rightarrow 2\rho y = \rho(x + 2\rho) \Rightarrow 2y = x + 2\rho \Rightarrow y = \frac{x}{2} + \rho$$

Η εφαπτομένη της παραβολής $x^2 = 2\rho y$ στο $A(2\rho, 2\rho)$ έχει εξίσωση :

$$\varepsilon_2 : xx_1 = \rho(y + y_1) \Rightarrow 2\rho x = \rho(y + 2\rho) \Rightarrow 2x = y + 2\rho \Rightarrow y = 2x - 2\rho$$

Η ε_1 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (B_1, -A_1) = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

Η ε_2 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}_2 = (B_2, -A_2) = (2, -1)$

$$\text{Οπότε } \cos(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \cos(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = \frac{\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2|} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot (-1)}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1} \cdot \sqrt{4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$