

19.19

- α) Αρχικά βρίσκουμε τα κοινά σημεία των δύο παραβολών, λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους :

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x^2 = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{4} \\ \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{4} \\ y^4 = 64y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{4} \\ y(y^3 - 64) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{4} \\ y = 0 \text{ ή } y = 4 \end{cases}$$

Για $y = 0$ είναι $x = \frac{0^2}{4} = 0$

Για $y = 4$ είναι $x = \frac{4^2}{4} = 4$

Άρα είναι $O(0,0)$ και $A(4,4)$

Η εφαπτομένη της C_1 στο A έχει εξίσωση :

$$\varepsilon_1 : y \cdot y_1 = \rho(x + x_1) \stackrel{\rho=2}{\Rightarrow} 4y = 2(x + 4) \Rightarrow 2y - x - 4 = 0$$

Για να βρούμε που κόβει η ε_1 την c_2 , λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους :

$$\begin{cases} x^2 = 4y \\ 2y - x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2(x + 4) \\ 2y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0 \\ 2y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ ή } x = 4 \\ 2y = x + 4 \end{cases}$$

Για $x = -2$ είναι $2y = -2 + 4 \Rightarrow y = 1$

Για $x = 4$ είναι $2y = 4 + 4 \Rightarrow y = 4$

Άρα την κόβει στο $\Gamma(-2,1)$ (το $(4,4)$ είναι το σημείο επαφής)

Όμοια βρίσκουμε τις συντεταγμένες του B , λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων

των c_1 και της ε_2 : $x \cdot x_1 = \rho(y + y_1) \stackrel{\rho=2}{\Rightarrow} 4x = 2(y + 4) \Rightarrow 2x - y - 4 = 0$

Βρίσκουμε $\Gamma(-2,1)$

- β) Η $B\Gamma$ έχει εξίσωση :

$$\varepsilon : y - y_B = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B}(x - x_B) \Rightarrow y - (-2) = \frac{1 - (-2)}{-2 - 1}(x - 1) \Rightarrow y + 2 = -(x - 1) \Rightarrow y = -x - 1$$

Θα αποδείξουμε ότι η ε είναι κοινή εφαπτομένη των δύο ευθειών.

Πράγματι, η εφαπτομένη της c_1 στο B έχει εξίσωση :

$$\varepsilon_B : y \cdot y_B = \rho(x + x_B) \Rightarrow -2y = 2(x + 1) \Rightarrow y = -(x + 1)$$

και, η εφαπτομένη της c_2 στο Γ έχει εξίσωση :

$$\varepsilon_\Gamma : x \cdot x_\Gamma = \rho(y + y_\Gamma) \Rightarrow -2x = 2(y + 1) \Rightarrow y = -x - 1$$

Άρα $\varepsilon \equiv \varepsilon_B \equiv \varepsilon_\Gamma$, δηλαδή η $B\Gamma$ είναι κοινή εφαπτομένη των δύο παραβολών

