

19.11 1Α)

α) Η εφαπτόμενη ε έχει εξίσωση $yy_1 = p(x + x_1) \xrightarrow{p=1, x_1=2, y_1=2} y \cdot 2 = 1(x + 2) \Rightarrow \varepsilon: x - 2y + 2 = 0$
 Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = \frac{1}{2}$, οπότε η ευθεία ε_1 που είναι κάθετη στην ε έχει αντιθετοαντίστροφο συντελεστή διεύθυνσης οπότε $\lambda_{\varepsilon_1} = -2$

β) Για να βρούμε το σημείο Α που τέμνει η ε τον άξονα $x'x$ θέτουμε $y = 0$ και έχουμε $x - 2 \cdot 0 + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$. Επομένως το σημείο Α έχει συντεταγμένες $A(-2, 0)$

Ακόμη η ευθεία ε_1 που διέρχεται από το $M(2, 2)$ και έχει $\lambda_{\varepsilon_1} = -2$ έχει εξίσωση $\varepsilon_1: y - 2 = -2(x - 2) \Rightarrow \varepsilon_1: y - 2 = -2x + 4 \Rightarrow \varepsilon_1: y = -2x + 6$

Για να βρούμε το σημείο Β που τέμνει η ε_1 τον άξονα $x'x$ θέτουμε $y = 0$ και έχουμε $0 = -2x + 6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$. Επομένως το σημείο Β έχει συντεταγμένες $B(3, 0)$

γ) Η εστία Ε της παραβολής έχει συντεταγμένες $E\left(\frac{p}{2}, 0\right) \xrightarrow{p=1} E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Το μέσο του ΑΒ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-2 + 3}{2}, \frac{0 + 0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Επομένως η εστία Ε της παραβολής, είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ

19.11 1Β)

α) Η εφαπτόμενη ε έχει εξίσωση $yy_1 = p(x + x_1) \Rightarrow yy_1 = px + px_1 \Rightarrow px - y_1y + px_1 = 0$

Η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = \frac{p}{y_1}$, οπότε η ευθεία ε_1 που είναι κάθετη στην ε έχει αντιθετοαντίστροφο συντελεστή διεύθυνσης οπότε $\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{y_1}{p}$

β) Για να βρούμε το σημείο Α που τέμνει η ε τον άξονα $x'x$ θέτουμε $y = 0$ και έχουμε $px - y_1 \cdot 0 + px_1 = 0 \Rightarrow px + px_1 = 0 \Rightarrow px = -px_1 \Rightarrow x = -x_1$. Επομένως το σημείο Α έχει συντεταγμένες $A(-x_1, 0)$

Ακόμη η ευθεία ε_1 που διέρχεται από το $M(x_1, y_1)$ και έχει $\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{y_1}{p}$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon_1: y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$$

Για να βρούμε το σημείο Β που τέμνει η ε_1 τον άξονα $x'x$ θέτουμε $y = 0$ και έχουμε

$$0 - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1) \Rightarrow \cancel{y_1}^1 = \cancel{y_1}^1 \frac{1}{p}(x - x_1) \Rightarrow 1 = \frac{1}{p}(x - x_1) \Rightarrow x - x_1 = p \Rightarrow x = p + x_1$$

Επομένως το σημείο Β έχει συντεταγμένες $B(p + x_1, 0)$

γ) Η εστία Ε της παραβολής έχει συντεταγμένες $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Το μέσο του ΑΒ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{-x_1 + p + x_1}{2}, \frac{0 + 0}{2}\right) = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Επομένως η εστία Ε της παραβολής, είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ

19.11 2Α)

α) Από το $M(9, 6)$ φέρνουμε παράλληλη στον άξονα $x'x$, η οποία θα έχει εξίσωση $y = 6$. Η διευθετούσα έχει εξίσωση $\delta: x = -\frac{p}{2} \xrightarrow{p=2} \delta: x = -1$

Άρα το A έχει συντεταγμένες $A(-1, 6)$

Η εφαπτομένη της C στο M έχει εξίσωση :

$$\varepsilon: yy_1 = \rho(x + x_1) \quad x_1=9, y_1=6, \rho=2 \Rightarrow 6y = 2(x+9) \Rightarrow 6y - 2x - 18 = 0 \Rightarrow 3y - x - 9 = 0$$

Για να βρούμε που τέμνει τον $x'x$ θέτουμε $y = 0$ και παίρνουμε $x = -9$

Άρα είναι $B(-9, 0)$

β) Είναι : $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right) \Rightarrow E(1, 0)$

Άρα : $\overrightarrow{AE} = (1 - (-1), 0 - 6) = (2, -6)$ και $\overrightarrow{MB} = (-9 - 9, 0 - 6) = (-18, -6)$

Το ευθύγραμμο τμήμα AE έχει μέσο :

$$M_1\left(\frac{x_A + x_E}{2}, \frac{y_A + y_E}{2}\right) = M_1\left(\frac{1-1}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = M_1(0, 3)$$

Το ευθύγραμμο τμήμα MB έχει μέσο :

$$M_2\left(\frac{x_B + x_M}{2}, \frac{y_B + y_M}{2}\right) = M_2\left(\frac{-9+9}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = M_2(0, 3)$$

Άρα τα δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν το ίδιο μέσο

γ) Είναι : $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{MB} = (2, -6) \cdot (-18, -6) = -36 + 36 = 0$ άρα $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{MB}$

δ) Το τετράπλευρο ABEM έχει διαγωνίους τα ευθύγραμμα τμήματα AE και MB, τα οποία αποδείξαμε ότι είναι κάθετα.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο.

Πράγματι είναι : $\overrightarrow{AB} = (-9 - (-1), 0 - 6) = (-8, -6)$

και $\overrightarrow{ME} = (1 - 9, 0 - 6) = (-8, -6)$

άρα $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{ME} // \overrightarrow{AB}$ και $|\overrightarrow{ME}| = |\overrightarrow{AB}|$

Δηλαδή το τετράπλευρο ABEM είναι παραλληλόγραμμο, και αφού οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα, είναι ρόμβος.

19.11 2B)

α) Από το $M(9, 6)$ φέρνουμε παράλληλη στον άξονα $x'x$, η οποία θα έχει εξίσωση $y = 6$. Η

διευθετούσα έχει εξίσωση $\delta: x = -\frac{\rho}{2} \Rightarrow \delta: x = -1$

Άρα το A έχει συντεταγμένες $A(-1, 6)$

Η εφαπτομένη της C στο M έχει εξίσωση :

$$\varepsilon: yy_1 = \rho(x + x_1) \quad x_1=9, y_1=6, \rho=2 \Rightarrow 6y = 2(x+9) \Rightarrow 6y - 2x - 18 = 0 \Rightarrow 3y - x - 9 = 0$$

Για να βρούμε που τέμνει τον $x'x$ θέτουμε $y = 0$ και παίρνουμε $x = -9$

Άρα είναι $B(-9, 0)$

β) Είναι : $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$

Το ευθύγραμμο τμήμα AE έχει μέσο :

$$M_1\left(\frac{x_A + x_E}{2}, \frac{y_A + y_E}{2}\right) = M_1\left(\frac{-\frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2}, y_1 + 0}{2}\right) = M_1\left(0, \frac{y_1}{2}\right)$$

Το ευθύγραμμο τμήμα MB έχει μέσο :

$$M_2\left(\frac{x_B + x_M}{2}, \frac{y_B + y_M}{2}\right) = M_2\left(\frac{-x_1 + x_1}{2}, \frac{0 + y_1}{2}\right) = M_2\left(0, \frac{y_1}{2}\right)$$

Άρα τα δύο ευθύγραμμα τμήματα έχουν το ίδιο μέσο

$$\gamma) \quad \overrightarrow{AE} = \left(\frac{\rho}{2} - \left(-\frac{\rho}{2} \right), 0 - y_1 \right) = (\rho, -y_1)$$

$$\overrightarrow{MB} = (-x_1 - x_1, 0 - y_1) = (-2x_1, -y_1)$$

$$\text{Είναι : } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{MB} = -2\rho x_1 + y_1^2 \stackrel{y^2=2\rho x}{=} 0$$

δ) Όπως στο 2) Α), αρκεί να δείξουμε ότι το ABEM είναι παραλληλόγραμμο.

$$\text{Πράγματι, είναι : } \overrightarrow{AB} = \left(-x_1 - \left(-\frac{\rho}{2} \right), 0 - y \right) = \left(\frac{\rho}{2} - x_1, -y_1 \right)$$

$$\text{και } \overrightarrow{ME} = \left(\frac{\rho}{2} - x_1, 0 - y_1 \right) = \left(\frac{\rho}{2} - x_1, -y_1 \right)$$

$$\text{Άρα } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ME} \Rightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{ME} \quad \text{και} \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{ME}|$$

Δηλαδή το τετράπλευρο ABEM είναι παραλληλόγραμμο, και αφού οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα, είναι ρόμβος.

19.11 3Α)

α) Η παραβολή έχει εστία $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right) \xRightarrow{\rho=8} E(4, 0)$ και η διευθύνουσα δ έχει εξίσωση :

$$\delta: x = -\frac{\rho}{2} \Rightarrow x = -4$$

Η ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων O ,

άρα έχει εξίσωση της μορφής : $\varepsilon_1: y = \lambda x$

Επειδή διέρχεται από το $M(1, 4)$ θα ισχύει $4 = \lambda \cdot 1 \Rightarrow \lambda = 4$

Άρα η ε_1 έχει εξίσωση : $\varepsilon_1: y = 4x$

β) Για να βρούμε τις συντεταγμένες του A ,

$$\text{λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων } \varepsilon_1, \delta: \begin{cases} x = -4 \\ y = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -16 \end{cases}$$

Άρα είναι $A(-4, -16)$

γ) Είναι $\overrightarrow{OA} = (-4 - 0, -16 - 0) = (-4, -16)$

$$\text{Είναι } \lambda_{\overrightarrow{OA}} = \frac{-16}{-4} = 4 = \lambda_{\varepsilon_1} \quad \text{άρα } \overrightarrow{OA} // \varepsilon$$

19.11 3Β)

α) Είναι $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$, $\delta: x = -\frac{\rho}{2}$

Η ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων O ,

άρα είναι της μορφής : $\varepsilon_1: y = \lambda x$

Επειδή διέρχεται από το $M(x_1, y_1)$ θα ισχύει $y_1 = \lambda x_1 \Rightarrow \lambda = \frac{y_1}{x_1}$

Άρα η ε_1 έχει εξίσωση $\varepsilon_1: y = \frac{y_1}{x_1} x \Rightarrow x_1 y - y_1 x = 0$

β) Για να βρούμε τις συντεταγμένες του A , λύνουμε το σύστημα των ε_1, δ :

$$\begin{cases} x = -\frac{\rho}{2} \\ x_1 y - y_1 x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\rho}{2} \\ x_1 y + y_1 \frac{\rho}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\rho}{2} \\ y = -\frac{y_1 \rho}{2x_1} \end{cases}$$

$$\text{Άρα είναι } A\left(-\frac{\rho}{2}, -\frac{\rho y_1}{2x_1}\right)$$

$$\gamma) \quad \overrightarrow{OA} = \left(-\frac{\rho}{2}, -\frac{\rho y_1}{2x_1}\right)$$

$$\text{Είναι } \lambda_{\overrightarrow{OA}} = \frac{-\frac{\rho}{2} \cdot \frac{y_1}{x_1}}{-\frac{\rho}{2}} = \frac{y_1}{x_1} = \lambda_{\varepsilon_1} \quad \text{άρα } \overrightarrow{OA} // \varepsilon_1$$

19.11 4A)

α) Είναι $\rho = 2$, $E(1,0)$, $\delta: x = -1$

$$\text{Η } \varepsilon \text{ έχει εξίσωση: } yy_1 = \rho(x + x_1) \xrightarrow{x_1=4=y_1} 4y = 2(x+4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y - 2x - 8 = 0 \Rightarrow 2y - x - 4 = 0 \quad \text{Άρα } \lambda_{\varepsilon} = \frac{1}{2}$$

Αφού A είναι η προβολή του E στην ε , είναι $AE \perp \varepsilon$

$$\text{Άρα } \lambda_{AE} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Rightarrow \lambda_{AE} = -2$$

Και αφού η AE διέρχεται από το $E(1,0)$ θα έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 2$$

β) Για να βρούμε τις συντεταγμένες του A λύνουμε το σύστημα των AE και ε :

$$\begin{cases} 2y - x - 4 = 0 \\ y = -2x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 4 \\ y = -2(2y - 4) + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 4 \\ y = -4y + 8 + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2y - 4 \\ 5y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{άρα είναι } A(0,2)$$

γ) Πρέπει να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου B .

Έστω $B(x, y)$. Τότε η προβολή $\Lambda(0,2)$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου

$$\text{τμήματος } EB. \quad \text{Άρα είναι : } \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+0}{2}\right) = (0,2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2} = 0 \\ \frac{y+0}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{άρα είναι } B(-1,4)$$

Παρατηρούμε ότι $x_B = -1$, άρα το B ανήκει στην $\delta: x = -1$

19.11 4B)

α) Η ε έχει εξίσωση $\varepsilon: yy_1 = \rho(x + x_1) \Rightarrow y = \frac{\rho}{y_1}x + \rho \frac{x_1}{y_1}$ άρα $\lambda_{\varepsilon} = \frac{\rho}{y_1}$

Αφού A είναι η προβολή του E στην ευθεία ε , θα είναι $AE \perp \varepsilon$

$$\text{Άρα } \lambda_{AE} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Rightarrow \lambda_{AE} = -\frac{y_1}{\rho}$$

Και αφού η AE διέρχεται από το $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$, θα έχει εξίσωση:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -\frac{y_1}{\rho}\left(x - \frac{\rho}{2}\right)$$

β) Για να βρούμε τις συντεταγμένες του A λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ε , AE :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{\rho}{y_1}x + \frac{\rho x_1}{y_1} \\ y = -\frac{y_1}{\rho}\left(x - \frac{\rho}{2}\right) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -\frac{y_1}{\rho}\left(x - \frac{\rho}{2}\right) = \frac{\rho}{y_1}x + \frac{\rho x_1}{y_1} \\ y = -\frac{y_1}{\rho}\left(x - \frac{\rho}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{y_1}{\rho}x + \frac{y_1}{2} = \frac{\rho}{y_1}x + \frac{\rho x_1}{y_1} \\ y = -\frac{y_1}{\rho}\left(x - \frac{\rho}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \left(-\frac{y_1}{\rho} - \frac{\rho}{y_1}\right) = \frac{\rho x_1}{y_1} - \frac{y_1}{2} \\ y = -\frac{y_1}{\rho}\left(x - \frac{\rho}{2}\right) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x\left(\frac{-y_1^2 - \rho^2}{\rho y_1}\right) = \frac{2\rho x_1 - y_1^2}{2y_1} \\ y = -\frac{y_1}{\rho}\left(x - \frac{\rho}{2}\right) \end{cases} \quad (1) \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{y_1}{\rho}\left(x - \frac{\rho}{2}\right) \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Όμως το $M(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής, άρα $y_1^2 = 2\rho x_1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x = 0$

Και η (2): $y = -\frac{y_1}{\rho}\left(0 - \frac{\rho}{2}\right) = \frac{y_1}{2}$ άρα είναι $A\left(0, \frac{y_1}{2}\right)$

γ) Έστω $B(x, y)$. Το A είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος EB

$$\text{Άρα είναι: } \left(\frac{\frac{\rho}{2} + x}{2}, \frac{0 + y}{2}\right) = \left(0, \frac{y_1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\frac{\rho}{2} + x}{2} = 0 \\ \frac{0 + y}{2} = \frac{y_1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\rho}{2} \\ y = y_1 \end{cases}$$

Άρα είναι $B\left(-\frac{\rho}{2}, y_1\right)$

Παρατηρούμε ότι $x_B = -\frac{\rho}{2}$ άρα το B ανήκει στην $\delta: x = -\frac{\rho}{2}$

19.11 5A)

α) Η εφαπτομένη της παραβολής στο $A(2, 2)$ έχει εξίσωση :

$$y \cdot y_A = \rho(x + x_A) \stackrel{\rho=1}{\Rightarrow} 2y = x + 2 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 1$$

Για να βρούμε που τέμνει τον άξονα $y'y$, θέτουμε στην εξίσωσή της $x = 0$ και έχουμε $y = 1$. Άρα είναι $\Gamma(0, 1)$

Η εφαπτομένη της παραβολής στο $B(8, 4)$ έχει εξίσωση :

$$yy_B = \rho(x + x_B) \Rightarrow 4y = x + 8 \Rightarrow y = \frac{x}{4} + 2$$

Θέτουμε $x = 0$ και έχουμε $y = 2$. Άρα είναι $\Delta(0, 2)$

β) Είναι : $M\left(\frac{x_\Gamma + x_\Delta}{2}, \frac{y_\Gamma + y_\Delta}{2}\right) = M\left(\frac{0+0}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = M\left(0, \frac{3}{2}\right)$

γ) Είναι : $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right) = E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$$\text{Άρα } \overrightarrow{ME} = \left(\frac{1}{2} - 0, 0 - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \text{ και } \overrightarrow{AB} = (8 - 2, 4 - 2) = (6, 2)$$

$$\text{Άρα } \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot 6 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 3 - 3 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{ME} \perp \overrightarrow{AB}$$

19.11 5B)

α) Η εφαπτομένη της παραβολής στο $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση :

$$yy_1 = \rho(x + x_1) \Rightarrow y = \frac{\rho}{y_1}(x + x_1)$$

Για να βρούμε που τέμνει τον άξονα $y'y$, θέτουμε $x = 0$ και έχουμε $y = \rho \frac{x_1}{y_1}$

Όμως το $A(x_1, y_1)$ ανήκει στην παραβολή, άρα είναι :

$$y_1^2 = 2\rho x_1 \Rightarrow y_1 \cdot y_1 = 2\rho x_1 \Rightarrow \frac{\rho x_1}{y_1} = \frac{y_1}{2}$$

$$\text{Άρα } y = \frac{y_1}{2} \text{ και } \Gamma\left(0, \frac{y_1}{2}\right). \text{ Όμοια βρίσκουμε } \Delta\left(0, \frac{y_2}{2}\right)$$

$$\beta) \text{ Είναι : } M\left(\frac{x_\Gamma + x_\Delta}{2}, \frac{y_\Gamma + y_\Delta}{2}\right) = M\left(\frac{0+0}{2}, \frac{\frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2}}{2}\right) = M\left(0, \frac{y_1 + y_2}{4}\right)$$

$$\gamma) \text{ Είναι : } E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$$

$$\text{Άρα } \overrightarrow{ME} = \left(\frac{\rho}{2} - 0, 0 - \left(\frac{y_1 + y_2}{4}\right)\right) = \left(\frac{\rho}{2}, -\frac{y_1 + y_2}{4}\right) \text{ και } \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\text{Άρα } \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1) \frac{\rho}{2} - \frac{(y_1 + y_2)(y_2 - y_1)}{4} = \frac{x_2 \rho}{2} - \frac{x_1 \rho}{2} + \frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4} = 0$$

$$\text{Γιατί } y_1^2 = 2\rho x_1 \Rightarrow \frac{y_1^2}{4} = \frac{\rho x_1}{2} \text{ και } y_2^2 = 2\rho x_2 \Rightarrow \frac{y_2^2}{4} = \frac{\rho x_2}{2}$$

$$\text{Άρα είναι : } ME \perp AB$$

19.11 6A)

$$\alpha) \text{ Είναι } \rho = 4$$

Η εφαπτομένη της παραβολής στο $M(2, 4)$ έχει εξίσωση :

$$yy_1 = \rho(x + x_1) \Rightarrow 4y = 4(x + 2) \Rightarrow y = x + 2$$

Για να βρούμε που τέμνει τον άξονα $y'y$, θέτουμε $x = 0$ και έχουμε $y = 2$

$$\text{Άρα είναι } A(0, 2)$$

$$\beta) \text{ Είναι } E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right) = E(2, 0)$$

$$\text{Άρα } \overrightarrow{AE} = (2 - 0, 0 - 2) = (2, -2) \text{ και } \overrightarrow{AM} = (2 - 0, 4 - 2) = (2, 2)$$

$$\text{Άρα } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AM} = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow AE \perp AM$$

19.11 6B)

$$\alpha) \text{ Η εφαπτομένη της παραβολής στο } M(x_1, y_1) \text{ έχει εξίσωση :}$$

$$yy_1 = \rho(x + x_1) \Rightarrow y = \frac{\rho}{y_1}(x + x_1)$$

$$\text{Θέτοντας } x = 0 \text{ έχουμε } y = \frac{\rho x_1}{y_1}$$

$$\text{Όμως : } y_1^2 = 2\rho x_1 \Rightarrow \frac{\rho x_1}{y_1} = \frac{y_1}{2}$$

$$\text{Άρα } y = \frac{y_1}{2} \Rightarrow A\left(0, \frac{y_1}{2}\right)$$

$$\beta) \text{ Είναι } E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$$

$$\text{Άρα } \overrightarrow{AE} = \left(\frac{\rho}{2} - 0, 0 - \frac{y_1}{2}\right) = \left(\frac{\rho}{2}, -\frac{y_1}{2}\right) \text{ και } \overrightarrow{AM} = \left(x_1 - 0, y_1 - \frac{y_1}{2}\right) = \left(x_1, \frac{y_1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{\rho x_1}{2} - \frac{y_1^2}{4} = 0 \text{ αφού } y_1^2 = 2\rho x_1 \text{ άρα } AE \perp AM$$