

α) Ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y = 0$ έχει κέντρο $K_1\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$

Ο κύκλος $C_2: x^2 + y^2 + \beta x + \alpha y = 0$ έχει κέντρο $K_2\left(-\frac{\beta}{2}, -\frac{\alpha}{2}\right)$

Η διάκεντρος K_1K_2 είναι η :

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \left(-\frac{\beta}{2} - \left(-\frac{\alpha}{2}\right), -\frac{\alpha}{2} - \left(-\frac{\beta}{2}\right)\right) = \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{με μήκος } |K_1K_2| = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{2}}{2}|\alpha - \beta|$$

β) Για να αποδείξουμε ότι οι κύκλοι τέμνονται , αρκεί να αποδείξουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων τους έχει δύο λύσεις :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + \beta x + \alpha y = 0 & (2) \end{cases}$$

Αφαιρούμε τις εξισώσεις κατά μέλη και έχουμε

$$(\alpha - \beta)x + (\beta - \alpha)y = 0 \Rightarrow (\alpha - \beta)x - (\alpha - \beta)y = 0 \Rightarrow (\alpha - \beta)(x - y) = 0 \stackrel{\alpha \neq \beta}{\Rightarrow} x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$\text{Οπότε } \begin{cases} (1) \stackrel{x=y}{\Rightarrow} x^2 + x^2 + \alpha x + \beta x = 0 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + \alpha x + \beta x = 0 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(2x + \alpha + \beta) = 0 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = -\frac{\alpha + \beta}{2} \\ y = -\frac{\alpha + \beta}{2} \end{cases}$$

Οπότε τα σημεία $O(0,0)$ και $A\left(-\frac{\alpha + \beta}{2}, -\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ είναι λύσεις του συστήματος ,

άρα και κοινά σημεία των δύο κύκλων

γ) Η κοινή χορδή είναι η ΟΑ και έχει μήκος

$$\begin{aligned} |OA| &= \sqrt{\left(-\frac{\alpha + \beta}{2} - 0\right)^2 + \left(-\frac{\alpha + \beta}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \frac{(\alpha + \beta)^2}{4}} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{4}}\sqrt{(\alpha + \beta)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}|\alpha + \beta| \end{aligned}$$