

α) Έστω : $C: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου

Το σημείο $O(0,0)$ ανήκει στον κύκλο , άρα θα ισχύει :

$$0^2 + 0^2 + A \cdot 0 + B \cdot 0 + \Gamma = 0 \Leftrightarrow \Gamma = 0 \quad (1)$$

Το σημείο $A(1,1)$ ανήκει στον κύκλο , άρα θα ισχύει :

$$1^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 1 + \Gamma = 0 \Leftrightarrow 2 + A + B + \Gamma = 0 \quad (2)$$

Το σημείο $B(\lambda, 0)$ ανήκει στον κύκλο , άρα θα ισχύει :

$$\lambda^2 + 0^2 + A \cdot \lambda + B \cdot 0 + \Gamma = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + A\lambda = 0 \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1),(2),(3) βρίσκουμε $A = -\lambda$, $B = \lambda - 2$, $\Gamma = 0$

Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι : $x^2 + y^2 - \lambda x + (\lambda - 2)y = 0$

β) Ο κύκλος έχει κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K\left(\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda-2}{2}\right)$

Έστω $K(x, y)$ ένα τυχαίο από τα παραπάνω κέντρα

$$\text{Τότε είναι : } x = \frac{\lambda}{2} \text{ και } y = -\frac{\lambda-2}{2}$$

Κάνοντας απαλοιφή του λ από τις εξισώσεις αυτές έχουμε :

$$\lambda = 2x \text{ και } y = -\frac{2x-2}{2} \Leftrightarrow y = 1-x$$

γ) Η πρώτη εφαπτόμενη ευθεία διέρχεται από το $O(0,0)$

Συνεπώς το μόνο που χρειαζόμαστε ακόμα προκειμένου να βρούμε την εξίσωση της , είναι ο συντελεστής διεύθυνσης . <από την Γεωμετρία του κύκλου γνωρίζουμε ότι η

εφαπτομένη στο σημείο O είναι κάθετη στην ακτίνα KO όπου $K\left(\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda-2}{2}\right)$

είναι το κέντρο του κύκλου

$$\text{Η ακτίνα } KO \text{ έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda_{KO} = \frac{-\frac{(\lambda-2)}{2} - 0}{\frac{\lambda}{2} - 0} = \frac{2-\lambda}{\lambda}$$

Επομένως η εφαπτομένη που είναι κάθετη στην ακτίνα , θα έχει εξίσωση:

$$\varepsilon: y - y_0 = \lambda_{\varepsilon} (x - x_0) \quad \lambda_{\varepsilon} = -\frac{\lambda}{2-\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-\lambda}{2-\lambda} x$$

Εργαζόμαστε όμοια για να βρούμε την εφαπτομένη στο A .

$$\text{Η ακτίνα } KA \text{ έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda_{KA} = \frac{1 - \left(-\frac{\lambda-2}{2}\right)}{1 - \frac{\lambda}{2}} = \frac{\lambda}{2-\lambda}$$

Ενώ η εφαπτομένη που είναι κάθετη στην ακτίνα KA έχει εξίσωση :

$$\begin{aligned} \varepsilon: y - y_0 &= \lambda_{\varepsilon} (x - x_0) \quad \lambda_{\varepsilon} = -\frac{2-\lambda}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad y - 1 = -\frac{2-\lambda}{\lambda} (x - 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda y - \lambda = -(2-\lambda)x + (2-\lambda) \Leftrightarrow \lambda y + (2-\lambda)x - 2 = 0 \end{aligned}$$

δ) Για να βρούμε το σημείο τομής των δύο ευθειών , λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών

$$\text{τους : } \begin{cases} y = -\frac{\lambda}{2-\lambda}x \\ \lambda y + (2-\lambda)x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-\lambda)y + \lambda x = 0 \\ \lambda y + (2-\lambda)x - 2 = 0 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε :

$$(2-\lambda)y + \lambda y + \lambda x + (2-\lambda)x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2y + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow y + x - 1 = 0$$

που είναι η σταθερή ευθεία πάνω στην οποία κινείται το σημείο τομής των δύο ευθειών