

α) Έστω : $\varepsilon : y = \lambda x + \beta$

Επειδή η ε διέρχεται από το $A(0,0)$ θα είναι $\beta = 0$

Επειδή η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης 4 θα είναι $\lambda = 4$

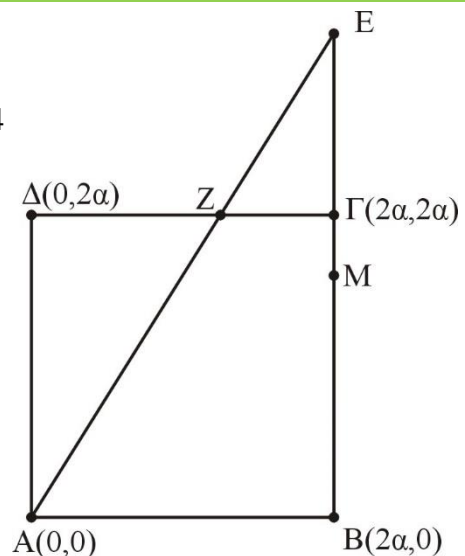
Άρα $\varepsilon : y = 4x$

Η ευθεία $\Gamma\Delta$ έχει εξίσωση $y = 2\alpha$ (ως κάθετη στον άξονα $y'y$) ενώ η ευθεία $B\Gamma$ έχει

εξίσωση $x = 2\alpha$ (ως κάθετη στον άξονα $x'x$)

Για να βρούμε τις συντεταγμένες του Z , λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των E και $\Delta\Gamma$:

$$\begin{cases} y = 4x \\ y = 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{2} \\ y = 2\alpha \end{cases} \quad \text{άρα } Z\left(\frac{\alpha}{2}, 2\alpha\right)$$



Για να βρούμε τις συντεταγμένες του E , λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των E και $B\Gamma$:

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 8\alpha \end{cases} \quad \text{άρα } E(2\alpha, 8\alpha)$$

Το M είναι το μέσο του BE , άρα έχει συντεταγμένες :

$$M\left(\frac{x_B + x_E}{2}, \frac{y_B + y_E}{2}\right) = M\left(\frac{2\alpha + 2\alpha}{2}, \frac{0 + 8\alpha}{2}\right) = M(2\alpha, 4\alpha)$$

β) Η ευθεία ZM έχει συντελεστή διεύθυνσης :

$$\lambda = \frac{y_M - y_Z}{x_M - x_Z} = \frac{4\alpha - 2\alpha}{2\alpha - \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\alpha}{\frac{3\alpha}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Και εξίσωση : } y - y_M = \lambda(x - x_M) \Rightarrow y - 4\alpha = \frac{4}{3}(x - 2\alpha) \Rightarrow 4x - 3y + 4\alpha = 0$$

γ) Η ευθεία ΔE έχει συντελεστή διεύθυνσης :

$$\lambda = \frac{y_E - y_\Delta}{x_E - x_\Delta} = \frac{8\alpha - 2\alpha}{2\alpha - 0} = 3$$

$$\text{Και εξίσωση : } y - y_\Delta = \lambda(x - x_\Delta) \Rightarrow y - 2\alpha = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x + 2\alpha$$

δ) Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τετραγώνου έχει ακτίνα $\rho = \alpha$ και κέντρο $K(\alpha, \alpha)$

$$\text{Έχουμε : } d(K, \varepsilon) = \frac{|4 \cdot \alpha - 3 \cdot \alpha + 4 \cdot \alpha|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{5\alpha}{5} = \alpha = \rho$$

Άρα η ZM εφάπτεται στον εγγεγραμμένο κύκλο

ε) Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τετραγώνου έχει ακτίνα :

$$\rho = \frac{\sqrt{(2\alpha)^2 + (2\alpha)^2}}{2} = \alpha\sqrt{2} \quad \text{και κέντρο } K(\alpha, \alpha)$$

$$\text{Άρα η εξίσωση } (x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = 2\alpha^2$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ZM και ΔE :

$$\begin{cases} y = 3x + 2\alpha \\ 4x - 3y + 4\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x + 2\alpha \\ 4x - 3(3x + 2\alpha) + 4\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x + 2\alpha \\ -5x = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\alpha}{5} \\ y = \frac{4\alpha}{5} \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση του κύκλου :

$$\left(-\frac{2\alpha}{5}-\alpha\right)^2+\left(\frac{4\alpha}{5}-\alpha\right)^2=2\alpha^2\Rightarrow\frac{49\alpha^2}{25}+\frac{1\alpha^2}{25}=2\alpha^2\Rightarrow\frac{50\alpha^2}{25}=2\alpha^2\text{ που ισχύει}$$

Άρα το σημείο τομής των ΖΜ και ΔΕ ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο