

18.33

α) Η εξίσωση : $x^2 + y^2 + 2\mu x - 2\mu y = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2\mu x - 2\mu y - 4 = 0$

είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = 2\mu$, $B = -2\mu$, $\Gamma = -4$

και $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (2\mu)^2 + (-2\mu)^2 - 4(-4) = 8\mu^2 + 16 > 0$

Άρα η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K(-\mu, \mu)$

και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{8\mu^2 + 16}}{2} = \sqrt{2\mu^2 + 4}$

β) Έστω $K(x, y)$ ένα τυχαίο από τα παραπάνω κέντρα

Τότε προφανώς $x = -\mu$ και $y = \mu$

Κάνοντας απαλοιφή του μ από τις παραπάνω εξισώσεις βρίσκουμε $x = -y \Leftrightarrow x + y = 0$

γ) Για να βρούμε τα σημεία που η ευθεία $y = 2$ τέμνει τον κύκλο , θέτουμε $y = 2$

στην εξίσωση και λύνουμε ως προς x : $x^2 + 2^2 + 2\mu x - 2\mu \cdot 2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 4 + 2\mu x - 4\mu - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\mu x - 4\mu = 0 \Leftrightarrow$

$\Delta = 8\mu^2$
 $\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-2\mu \pm 2\sqrt{5}\mu}{2} = -\mu \pm \sqrt{2}\mu$

Άρα $A(-\mu + \sqrt{5}\mu, 2)$ και $B(-\mu - \sqrt{5}\mu, 2)$

Επομένως είναι $\overrightarrow{OA} = (-\mu \pm \sqrt{5}\mu, 2)$ και $\overrightarrow{OB} = (-\mu - \sqrt{5}\mu, 2)$

Είναι : $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (-\mu + \sqrt{5}\mu)(-\mu - \sqrt{5}\mu) + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mu^2 - 5\mu^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = \pm 1$