

18.32

α) Η εξίσωση $C_1 : x^2 + y^2 - 2x + 2\lambda y + \lambda^2 - 8 = 0$ είναι της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με} \quad A = -2, B = 2\lambda, \Gamma = \lambda^2 - 8 \quad \text{και}$$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2)^2 + (2\lambda)^2 - 4(\lambda^2 - 8) = 4 + 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 32 = 36 > 0$$

Άρα η εξίσωση του C_1 παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Η εξίσωση $C_2 : x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2y + \lambda^2$ είναι της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με} \quad A = 2\lambda, B = 2, \Gamma = \lambda^2 \quad \text{και}$$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (2\lambda)^2 + 2^2 - 4\lambda^2 = 4 > 0$$

Άρα η εξίσωση του C_2 παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Θα πρέπει για την διάκεντρο δ να ισχύει $\delta = |\rho_1 - \rho_2|$ όπου ρ_1 η ακτίνα του C_1 και ρ_2 η ακτίνα του C_2

$$\text{Ο } C_1 \text{ έχει κέντρο } K(1, -\lambda) \text{ και ακτίνα } \rho_1 = \frac{\sqrt{36}}{2} = 3$$

$$\text{Ο } C_2 \text{ έχει κέντρο } \Lambda(-\lambda, -1) \text{ και ακτίνα } \rho_2 = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

Η διάκεντρος $K\Lambda = \delta$ έχει μήκος:

$$|K\Lambda| = \sqrt{(-\lambda - 1)^2 + (-1 + \lambda)^2} = \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 1 + 1 - 2\lambda + \lambda^2} = \sqrt{2\lambda^2 + 2}$$

$$\begin{aligned} \text{Θα πρέπει να ισχύει: } \delta = |\rho_1 - \rho_2| &\Leftrightarrow \sqrt{2\lambda^2 + 2} = |3 - 1| \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 + 2} = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow 2(\lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1 \end{aligned}$$