

18.25

α) Η εξίσωση $C_1 : x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$
με $A = -4$, $B = -2$, $\Gamma = -5$ και $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 40 > 0$
άρα η εξίσωση του C_1 παριστάνει κύκλο

Η εξίσωση $C_2 : x^2 + y^2 - 14x - 12y + 65 = 0$ είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$
με $A = -14$, $B = -12$, $\Gamma = 65$ και $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 80 > 0$
άρα η εξίσωση του C_2 παριστάνει κύκλο

β) Ο C_1 έχει κέντρο $K_1\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{-2}{2}\right) = K_1(2, 1)$ και

ο C_2 έχει κέντρο $K_2\left(-\frac{-14}{2}, -\frac{-12}{2}\right) = K_2(7, 6)$

Η διάκεντρος των C_1, C_2 διέρχεται από τα K_1, K_2

άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 1}{7 - 2} = 1$

και εξίσωση $\varepsilon_1 : y - y_1 = \lambda(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1$

γ) Για να βρούμε τα σημεία τομής των δύο κύκλων, λύνουμε το σύστημα των

$$\text{εξισώσεών τους : } \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 14x - 12y + 65 = 0 \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα βρίσκουμε ότι τα σημεία τομής των δύο κύκλων είναι τα $A(5, 2)$ και $B(3, 4)$

δ) Η κοινή χορδή των δύο κύκλων διέρχεται από τα σημεία τομής τους A και B

$$\text{Άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{4 - 2}{3 - 5} = -1$$

$$\text{Και εξίσωση } \varepsilon_2 : y - y_1 = \lambda(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = -1(x - 5) \Rightarrow y = -x + 7$$