

18.24

α) Η εξίσωση $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 21 = 0$ είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma$ με $A = -8$, $B = -10$, $\Gamma = 21$ και $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 80 > 0$

άρα η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο :

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K\left(-\frac{-8}{2}, -\frac{-10}{2}\right) = K(4, 5)$$

$$\text{Και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{80}}{2} = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$

β) Για να βρούμε που τέμνει ο κύκλος τον άξονα $x'x$ θέτουμε $y = 0$ και έχουμε :

$$x^2 + 0^2 - 8x - 10 \cdot 0 + 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 21 = 0$$

$\Delta < 0$

$\Leftrightarrow$ ο κύκλος δεν τέμνει τον άξονα $x'x$

Για να βρούμε που τέμνει ο κύκλος τον άξονα $y'y$ θέτουμε $x = 0$ και έχουμε :

$$y^2 + 0^2 - 8 \cdot 0 - 10y + 21 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 10y + 21 = 0 \Leftrightarrow y = 3 \quad \text{ή} \quad y = 7$$

Άρα ο κύκλος τέμνει τον άξονα $y'y$ στα σημεία $\Gamma(0, 3)$ και $\Delta(0, 7)$

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του A ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου

Πράγματι : $2^2 + 9^2 - 8 \cdot 2 - 10 \cdot 9 + 21 = 0$ που ισχύει

Άρα το $A(2, 9)$ ανήκει στον κύκλο

δ) Το κέντρο K είναι το μέσο της διαμέτρου AB

$$\text{Έστω } B(x, y) \text{ τότε θα ισχύει } K(4, 5) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+9}{2}\right)$$

$$\text{Οπότε } \frac{x+2}{2} = 4 \text{ και } \frac{y+9}{2} = 5$$

Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε $x = 6$ και $y = 1$

Άρα είναι $B(6, 1)$