

18.23 1)

α) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + (\lambda + 2)x + \lambda y - 2\lambda - 4 = 0$ είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = \lambda + 2$, $B = \lambda$ και $\Gamma = -2\lambda - 4$ και $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (\lambda + 2)^2 + \lambda^2 - 4(-2\lambda - 4) =$
 $= \lambda^2 + 4\lambda + 4 + \lambda^2 + 8\lambda + 16 = 2\lambda^2 + 12\lambda + 20 = 2(\lambda^2 + 6\lambda + 10) \stackrel{\Delta = -4 < 0}{>} 0$

Επομένως $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και άρα η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Οι κύκλοι που προκύπτουν από την εξίσωση (1) έχουν κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K\left(-\frac{\lambda + 2}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right)$

Έστω $K(x, y)$ ένα τυχαίο από τα παραπάνω κέντρα. Τότε προφανώς είναι $x = -\frac{\lambda + 2}{2}$ και $y = -\frac{\lambda}{2}$

Κάνουμε απαλοιφή του λ από τις παραπάνω εξισώσεις $y = -\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = -2y$ οπότε

$$x = -\frac{\lambda + 2}{2} \Rightarrow x = -\frac{-2y + 2}{2} \Rightarrow 2x = 2y - 2 \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

γ) Θεωρούμε δύο τιμές του λ , έστω $\lambda = 0$ και $\lambda = -2$ και τους κύκλους που προκύπτουν

για $\lambda = 0$ έχουμε τον κύκλο $C_1: x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ (2)

για $\lambda = -2$ έχουμε τον κύκλο $C_2: x^2 + y^2 - 2y = 0$ (3)

Λύνοντας το σύστημα των (2) και (3) βρίσκουμε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 τέμνονται στα σημεία $A(0, 2)$ και $B(1, 1)$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι και οι υπόλοιποι κύκλοι διέρχονται από το $A(0, 2)$ και το $B(1, 1)$

Όμως (1) $\stackrel{\text{για } (x,y)=(0,2)}{\Leftrightarrow} 0^2 + 2^2 + (\lambda + 2) \cdot 0 + \lambda \cdot 2 - 2\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4 = 0$ που ισχύει

και (1) $\stackrel{\text{για } (x,y)=(1,1)}{\Leftrightarrow} 1^2 + 1^2 + (\lambda + 2) \cdot 1 + \lambda \cdot 1 - 2\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow 2 + \lambda + 2 + \lambda - 2\lambda - 4 = 0$ που ισχύει

Άρα όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από τα σημεία $A(0, 2)$ και $B(1, 1)$

δ) Για $\lambda = 0$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{\lambda + 2}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right) = K(-1, 0)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{2(\lambda^2 - 2\lambda + 10)}}{2} \stackrel{\lambda=0}{=} \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι η απόσταση του κέντρου του παραπάνω κύκλου από την ευθεία $\varepsilon: y = -2x + 3 \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$ είναι ίση με την ακτίνα. Πράγματι

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|2(-1) + 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = \rho \text{ που σημαίνει ότι ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία}$$

18.23 2)

α) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y - 3\lambda - 5 = 0$ είναι της μορφής

$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = \lambda$, $B = \lambda$ και $\Gamma = -3\lambda - 5$ και

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = \lambda^2 + \lambda^2 - 4(-3\lambda - 5) = 2\lambda^2 + 12\lambda + 20 = 2(\lambda^2 + 6\lambda + 10) \stackrel{\Delta = -4 < 0}{>} 0$$

Επομένως $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και άρα η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Οι κύκλοι που προκύπτουν από την εξίσωση (1) έχουν κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right)$

Έστω $K(x, y)$ ένα τυχαίο σημείο από τα παραπάνω κέντρα.

Τότε προφανώς είναι $x = -\frac{\lambda}{2}$ και $y = -\frac{\lambda}{2}$

Κάνουμε απαλοιφή του λ από τις παραπάνω εξισώσεις : $y = -\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = -2y$

Οπότε : $x = -\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x = -\frac{(-2y)}{2} \Rightarrow x = y$

γ) Θεωρούμε δύο τιμές του λ , έστω $\lambda = 0$ και $\lambda = 1$

και τους κύκλους που προκύπτουν :

για $\lambda = 0$ έχουμε τον κύκλο $C_1 : x^2 + y^2 - 5 = 0$ (2)

για $\lambda = 1$ έχουμε τον κύκλο $C_2 : x^2 + y^2 + x + y - 8 = 0$ (3)

Λύνοντας το σύστημα των (2) και (3) βρίσκουμε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2

τέμνονται στα σημεία $A(2,1)$ και $B(1,2)$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι και οι υπόλοιποι κύκλοι διέρχονται από το $A(2,1)$

και το $B(1,2)$

Όμως (1) $\stackrel{\gamma(x,y)=(2,1)}{\Leftrightarrow} 2^2 + 1^2 + 2\lambda + \lambda - 3\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow 5 - 5 = 0$ που ισχύει

και (1) $\stackrel{(x,y)=(1,2)}{\Leftrightarrow} 1^2 + 2^2 + \lambda + 2\lambda - 3\lambda - 5 = 0$ που ισχύει

Άρα όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από τα σημεία

$A(2,1)$ και $B(1,2)$

δ) Για $\lambda = 0$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2}\right) = K(0,0)$

και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{2(\lambda^2 + 6\lambda + 10)}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία

$\varepsilon : y = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$ είναι ίση με την ακτίνα

Πράγματι $d(K, \varepsilon) = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = \rho$

Που σημαίνει ότι ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία ε

18.23 3)

α) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + (2 - \lambda)y = 0$ είναι της μορφής

$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = \lambda$, $B = 2 - \lambda$ και $\Gamma = 0$ και

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = \lambda^2 + (2 - \lambda)^2 > 0$

Επομένως $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και άρα η (1) παριστάνει

κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Οι κύκλοι που προκύπτουν από την εξίσωση (1) έχουν κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K\left(-\frac{\lambda}{2}, -\frac{(2-\lambda)}{2}\right)$$

Έστω $K(x, y)$ ένα τυχαίο σημείο από τα παραπάνω κέντρα.

$$\text{Τότε προφανώς είναι } x = -\frac{\lambda}{2} \text{ και } y = -\frac{(2-\lambda)}{2}$$

Κάνουμε απαλοιφή του λ από τις παραπάνω εξισώσεις :

$$y = -\frac{(2-\lambda)}{2} \Rightarrow \lambda - 2 = 2y \Rightarrow \lambda = 2y + 2$$

$$\text{Οπότε : } x = -\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x = -\frac{2y+2}{2} \Rightarrow x = -y-1 \Rightarrow x+y+1=0$$

γ) Θεωρούμε δύο τιμές του λ , έστω $\lambda = 0$ και $\lambda = 2$

και τους κύκλους που προκύπτουν :

$$\text{για } \lambda = 0 \text{ έχουμε τον κύκλο } C_1 : x^2 + y^2 + 2y = 0 \quad (2)$$

$$\text{για } \lambda = 2 \text{ έχουμε τον κύκλο } C_2 : x^2 + y^2 + 2x = 0 \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των (2) και (3) βρίσκουμε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2

τέμνονται στα σημεία $A(0,0)$ και $B(-1,-1)$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι και οι υπόλοιποι κύκλοι διέρχονται από το $A(0,0)$

και το $B(-1,-1)$

$$\text{Όμως (1) } \stackrel{\text{για } (x,y)=(0,0)}{\Leftrightarrow} 0^2 + 0^2 + 0 \cdot \lambda + (2-\lambda) \cdot 0 = 0 \text{ που ισχύει}$$

$$\text{και (1) } \stackrel{(x,y)=(-1,-1)}{\Leftrightarrow} (-1)^2 + (-1)^2 + \lambda(-1) + (2-\lambda) \cdot (-1) = 0 \text{ που ισχύει}$$

Άρα όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από τα σημεία

$A(0,0)$ και $B(-1,-1)$

δ) Για $\lambda = 0$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda-2}{2}\right) = K(0,-1)$

$$\text{και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{\lambda^2 + (2-\lambda)^2}}{2} \stackrel{\lambda=0}{=} \frac{2}{2} = 1$$

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου από τον άξονα

$x'x (y=0)$ είναι ίση με την ακτίνα

$$\text{Πράγματι } d(k, \varepsilon) = \frac{|0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{1}{1} = 1 = \rho$$

Που σημαίνει ότι ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία ε

18.23 4)

α) Η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + 6\lambda - 5 = 0$ είναι της μορφής

$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = -2\lambda$, $B = -2\lambda$ και $\Gamma = 6\lambda - 5$ και

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2\lambda)^2 + (-2\lambda)^2 - 4(6\lambda - 5) =$$

$$= 8\lambda^2 - 24\lambda + 20 = 4(2\lambda^2 - 6\lambda + 5) \stackrel{\Delta = -4 < 0}{>} 0$$

Επομένως $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και άρα η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) Οι κύκλοι που προκύπτουν από την εξίσωση (1) έχουν κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K(\lambda, \lambda)$$

Έστω $K(x, y)$ ένα τυχαίο σημείο από τα παραπάνω κέντρα.

Τότε προφανώς είναι $x = \lambda$ και $y = \lambda$

Κάνουμε απαλοιφή του λ από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε: $x - y = 0$

γ) Θεωρούμε δύο τιμές του λ , έστω $\lambda = 0$ και $\lambda = 1$

και τους κύκλους που προκύπτουν:

$$\text{για } \lambda = 0 \text{ έχουμε τον κύκλο } C_1: x^2 + y^2 - 5 = 0 \quad (2)$$

$$\text{για } \lambda = 1 \text{ έχουμε τον κύκλο } C_2: x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των (2) και (3) βρίσκουμε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2

τέμνονται στα σημεία $A(2,1)$ και $B(1,2)$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι και οι υπόλοιποι κύκλοι διέρχονται από το $A(2,1)$

και το $B(1,2)$

$$\text{Όμως } (1) \stackrel{\gamma_A(x,y)=(2,1)}{\Leftrightarrow} 2^2 + 1^2 - 2\lambda \cdot 2 - 2\lambda \cdot 1 + 6\lambda - 5 = 0 \text{ που ισχύει}$$

$$\text{και } (1) \stackrel{(x,y)=(1,2)}{\Leftrightarrow} 1^2 + 2^2 - 2\lambda \cdot 1 - 2\lambda \cdot 2 + 6\lambda - 5 = 0 \text{ που ισχύει}$$

Άρα όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από τα σημεία

$A(2,1)$ και $B(1,2)$

δ) Οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) έχουν κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K(\lambda, \lambda)$

$$\text{και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{4(2\lambda^2 - 6\lambda + 5)}}{2} = \sqrt{2\lambda^2 - 6\lambda + 5}$$

$$\text{πρέπει να βρούμε } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ώστε: } d(K, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot \lambda - 1 \cdot \lambda + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{2\lambda^2 - 6\lambda + 5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2\lambda - \lambda + 5)^2}{5} = 2\lambda^2 - 6\lambda + 5 \Leftrightarrow \lambda^2 + 10\lambda + 25 = 10\lambda^2 - 30\lambda + 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\lambda^2 - 40\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(9\lambda - 40) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = \frac{40}{9}$$

Άρα για $\lambda = 0$ και για $\lambda = \frac{40}{9}$ ο κύκλος που προκύπτει από την (1)

εφάπτεται στην ευθεία ε

18.23 5)

α) Η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\alpha x - 4\alpha y = 0$ είναι της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } A = -4\alpha, B = -4\alpha \text{ και } \Gamma = 0$$

Για να παριστάνει κύκλο θα πρέπει :

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \Leftrightarrow (-4\alpha)^2 + (-4\alpha)^2 - 4 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 32\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$$

Άρα για κάθε $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ η (1) παριστάνει κύκλο

β) Οι κύκλοι που προκύπτουν από την εξίσωση (1) έχουν κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = K(2\alpha, 2\alpha)$$

$$\text{Και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{32\alpha^2}}{2} = 2\sqrt{2}\alpha^2$$

γ) Έστω $K(x, y)$ ένα τυχαίο σημείο από τα παραπάνω κέντρα.

Τότε προφανώς είναι $x = 2\alpha$ και $y = 2\alpha$

Κάνουμε απαλοιφή του α από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε : $x = y \Leftrightarrow x - y = 0$

δ) Ο άξονας $x'x$ έχει εξίσωση $\varepsilon : y = 0$

θα εξετάσουμε αν υπάρχει $\alpha \neq 0$ ώστε :

$$d(\kappa, \varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|0 \cdot 2\alpha + 1 \cdot 2\alpha + 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 2\sqrt{2}\alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2\alpha| = 2\sqrt{2}\alpha^2 \Leftrightarrow 4\alpha^2 = 4 \cdot 2\alpha^2 \Leftrightarrow 4\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ άτοπο αφού,}$$

για $\alpha = 0$ η εξίσωση (1) δεν παριστάνει κύκλο.

Άρα δεν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος να εφάπτεται στον άξονα $x'x$

18.23 6)

α) Η εξίσωση $x^2 + y^2 - (4 - 2\kappa)x - 2(1 + \kappa)y + 5 - 2\kappa = 0$ είναι της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } A = -(4 - 2\kappa), B = -2(\kappa + 1) \text{ και } \Gamma = 5 - 2\kappa \text{ και}$$

$$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (4 - 2\kappa)^2 + [2(\kappa + 1)]^2 - 4(5 - 2\kappa) =$$

$$= 16 - 16\kappa + 4\kappa^2 + 4\kappa^2 + 8\kappa + 4 - 20 + 8\kappa = 8\kappa^2 > 0 \text{ για κάθε } \kappa \in (0, +\infty)$$

Άρα η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\kappa \in (0, +\infty)$

Οι κύκλοι που προκύπτουν από την εξίσωση (1) έχουν κέντρο

$$M\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = M(\kappa - 2, 1 + \kappa)$$

$$\text{Και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{8\kappa^2}}{2} = \kappa\sqrt{2}$$

β) Έστω $M(x, y)$ ένα τυχαίο σημείο από τα παραπάνω κέντρα.

Τότε προφανώς είναι $x = \kappa - 2$ και $y = 1 + \kappa$

Κάνουμε απαλοιφή του κ από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε :

$$y = 1 + \kappa \Rightarrow \kappa = y - 1 \quad \text{και} \quad x = \kappa - 2 \Rightarrow x = y - 1 - 2 \Rightarrow y - x - 3 = 0$$

Άρα για κάθε $\kappa > 0$ το M ανήκει στην ευθεία $y - x - 3 = 0$

γ) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $\kappa > 0$ ισχύει $d(\kappa, \varepsilon) = \rho$

$$\text{Πράγματι : } d(\kappa, \varepsilon) = \frac{|-1 \cdot (\kappa - 2) - 1(1 + \kappa) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-\kappa + 2 - 1 - \kappa - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{2|\kappa|}{\sqrt{2}} \stackrel{\kappa > 0}{=} \kappa\sqrt{2} = \rho$$

Άρα για κάθε $\kappa > 0$ η ευθεία ε είναι εφαπτομένη του κύκλου που προκύπτει από την (1)