

18.22 1)

Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2$

Ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(7,5)$ και ακτίνα $\rho_2 = 1$

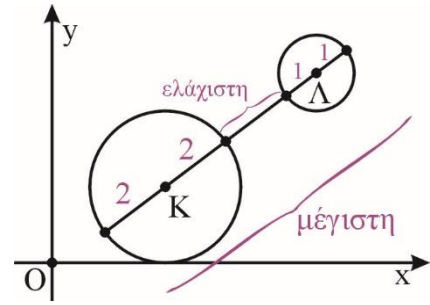
Η διάκεντρος $ΚΛ$ έχει μήκος

$$(ΚΛ) = \sqrt{(7-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα η ελάχιστη απόσταση των σημείων A και B είναι $(ΚΛ) - \rho_1 - \rho_2 = 5 - 2 - 1 = 2$

και η μέγιστη απόσταση των σημείων A και B είναι

$$(ΚΛ) + \rho_1 + \rho_2 = 5 + 2 + 1 = 8$$



18.22 2)

Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(2,3)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2$

Ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(6,0)$ και ακτίνα $\rho_2 = 1$

Η διάκεντρος $ΚΛ$ έχει μήκος : $(ΚΛ) = \sqrt{(6-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

Η ελάχιστη απόσταση των σημείων A και B είναι $(ΚΛ) - \rho_1 - \rho_2 = 5 - 2 - 1 = 2$

Η μέγιστη απόσταση των σημείων A και B είναι $(ΚΛ) + \rho_1 + \rho_2 = 5 + 2 + 1 = 8$

18.22 3)

Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(-4,2)$ και ακτίνα $\rho_1 = 6$

Ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $\Lambda(2,-6)$ και ακτίνα $\rho_2 = 2$

Η διάκεντρος $ΚΛ$ έχει μήκος : $(ΚΛ) = \sqrt{(-4-2)^2 + (2-(-6))^2} = 10$

Η ελάχιστη απόσταση των σημείων A και B είναι $(ΚΛ) - \rho_1 - \rho_2 = 10 - 6 - 2 = 2$

Και η μέγιστη απόσταση των σημείων A και B είναι $(ΚΛ) + \rho_1 + \rho_2 = 10 + 6 + 2 = 18$

18.22 4)

Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Η απόσταση του K από την ε είναι :

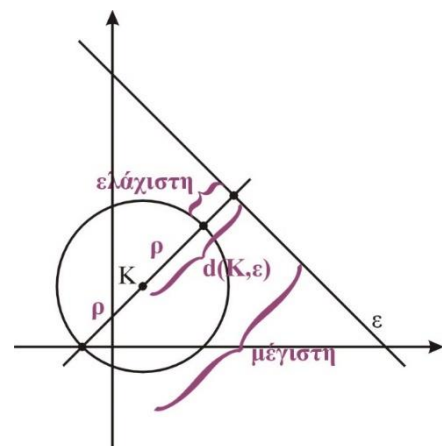
$$d(K, \varepsilon) = \frac{|1+2-9|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Η ελάχιστη απόσταση, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι :

$$d(K, \varepsilon) - \rho = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Η μέγιστη απόσταση είναι

$$d(K, \varepsilon) + \rho = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$



18.22 5)

Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(-1,3)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{80} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$

Η απόσταση του K από την ε είναι :

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|2 \cdot (-1) - 3 - 15|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-20|}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$$

Η ελάχιστη απόσταση είναι :

$$d(\kappa, \varepsilon) - \rho = 4\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 0 \quad (\text{άρα η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο})$$

$$\text{Η μέγιστη απόσταση είναι } d(\kappa, \varepsilon) + \rho = 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

18.22 6)

Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(-1, 0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$

Η απόσταση του K από την ε είναι :

$$d(\kappa, \varepsilon) = \frac{|2 \cdot (-1) + 0 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

Η ελάχιστη απόσταση είναι :

$$d(\kappa, \varepsilon) - \rho = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$\text{Η μέγιστη απόσταση είναι } d(\kappa, \varepsilon) + \rho = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Για να βρούμε σε ποια σημεία του κύκλου επιτυγχάνονται οι αποστάσεις αυτές ,

βρίσκουμε αρχικά την ευθεία που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το $K(-1, 0)$

αφού είναι κάθετη στην ε , θα έχει συντελεστή διεύθυνσης :

$$\lambda = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon} = -\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \quad \text{άρα είναι της μορφής } y = \frac{1}{2}x + \beta$$

Για να βρούμε το β , αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του $A(-1, 0)$:

$$0 = \frac{1}{2}(-1) + \beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

Άρα αρκεί να βρούμε που τέμνει η $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ τον κύκλο , λύνοντας το σύστημα :

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 5 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = -3 & \text{ή} & x = 1 \\ y = 1 & & \text{ή} & y = 1 \end{cases}$$

Άρα στα σημεία $A(-3, 1)$ και $B(1, 1)$

18.22 7)

Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(4, 4)$ και ακτίνα $\sqrt{2}$

Η απόσταση της αρχής των αξόνων O από το κέντρο K είναι :

$$(OK) = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Η ελάχιστη απόσταση είναι : } (OK) - \rho = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Η μέγιστη απόσταση είναι : } (OK) + \rho = 5\sqrt{2}$$

Για να βρούμε σε ποια σημεία του κύκλου επιτυγχάνονται αυτές οι αποστάσεις ,

βρίσκουμε αρχικά την ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το

κέντρο K . Θα έχει συντελεστή διεύθυνσης :

$$\lambda = \frac{4-0}{4-0} = 1 \quad \text{και εξίσωση } y - 0 = \lambda(x - 0) \Rightarrow y = x$$

Αρκεί τώρα να βρούμε τα σημεία τομής της με τον κύκλο , λύνοντας το σύστημα :

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 2 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & \text{ή} & x = 5 \\ y = 3 & & y = 5 \end{cases}$$

Άρα στα $A(3,3)$ και $B(5,5)$

18.22 8)

Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K(2,4)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$

Η απόσταση του σημείου $\Lambda(5,10)$ από το K είναι :

$$(K\Lambda) = \sqrt{(5-2)^2 + (10-4)^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Η ελάχιστη απόσταση είναι : $(K\Lambda) - \rho = 2\sqrt{5}$

Η μέγιστη απόσταση είναι : $(K\Lambda) + \rho = 4\sqrt{5}$

Για να βρούμε σε ποια σημεία του κύκλου επιτυγχάνονται αυτές οι αποστάσεις ,
βρίσκουμε αρχικά την ευθεία που διέρχεται από τα K και Λ

Θα έχει συντελεστή διεύθυνσης :

$$\lambda = \frac{y_K - y_\Lambda}{x_K - x_\Lambda} = \frac{4-10}{2-5} = 2 \quad \text{και εξίσωση} \quad y - y_o = \lambda(x - x_o) \Rightarrow y - 4 = 2(x - 2) \Rightarrow y - 2x = 0$$

Αρκεί τώρα να βρούμε τα σημεία τομής της με τον κύκλο , λύνοντας το σύστημα :

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5 \\ y - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$$

Άρα στα $A(1,2)$ και $B(2,6)$