

18.20 1)

Έστω $C: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$ η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου C . Τότε

$$A \in C \Leftrightarrow 2^2 + 1^2 + 2A + B + \Gamma = 0 \Leftrightarrow 2A + B + \Gamma = -5 \quad (1)$$

$$B \in C \Leftrightarrow (-1)^2 + 4^2 + A(-1) + 4B + \Gamma = 0 \Leftrightarrow -A + 4B + \Gamma = -17 \quad (2)$$

Ακόμη το κέντρο του κύκλου είναι $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και επειδή είναι σημείο της ευθείας

$$\varepsilon: 4x - 5y + 11 = 0 \text{ θα ισχύει } 4\left(-\frac{A}{2}\right) - 5\left(-\frac{B}{2}\right) + 11 = 0 \Leftrightarrow -4A + 5B = -22 \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) και (3) βρίσκουμε $A = -2$, $B = -6$ και $\Gamma = 5$

Παρατηρούμε ότι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2)^2 + (-6)^2 - 4 \cdot 5 = 20 > 0$

οπότε ο κύκλος C έχει εξίσωση $C: x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

18.20 2)

Έστω $c: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$ η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου C

$$\text{Τότε: } A \in C \Leftrightarrow (-2)^2 + (-1)^2 + A \cdot (-2) + B \cdot (-1) + \Gamma = 0 \Leftrightarrow -2A - B + \Gamma = -5 \quad (1)$$

$$B \in C \Leftrightarrow (-1)^2 + 6^2 + A \cdot (-1) + B \cdot 6 + \Gamma = 0 \Leftrightarrow -A + 6B + \Gamma = -37 \quad (2)$$

Ακόμη το κέντρο του κύκλου είναι $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

και επειδή είναι το σημείο της ευθείας $\varepsilon: y = x$, θα ισχύει:

$$-\frac{B}{2} = -\frac{A}{2} \Leftrightarrow B = A \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2), (3) βρίσκουμε $A = -4$, $B = -4$, $\Gamma = -17$

Παρατηρούμε ότι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 100 > 0$

Οπότε ο κύκλος C έχει εξίσωση: $C: x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 - 17 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

18.20 3)

Έστω $c: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$ η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου C

$$\text{Τότε: } A \in C \Leftrightarrow 2^2 + 3^2 + A \cdot 2 + B \cdot 3 + \Gamma = 0 \Leftrightarrow 2A + 3B + \Gamma = -13 \quad (1)$$

$$B \in C \Leftrightarrow 4^2 + 5^2 + A \cdot 4 + B \cdot 5 + \Gamma = 0 \Leftrightarrow 4A + 5B + \Gamma = -41 \quad (2)$$

Ακόμη το κέντρο του κύκλου είναι $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

και επειδή είναι σημείο του άξονα $x'x$, θα ισχύει:

$$y = 0 \Leftrightarrow -\frac{B}{2} = 0 \Leftrightarrow B = 0 \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2), (3) βρίσκουμε $A = -14$, $B = 0$, $\Gamma = 15$

Παρατηρούμε ότι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 136 > 0$

Οπότε ο κύκλος C έχει εξίσωση: $C: x^2 + y^2 - 14x + 15 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 7^2 + y^2 = 7^2 - 15 \Leftrightarrow (x - 7)^2 + y^2 = 34$$