18.15 1)

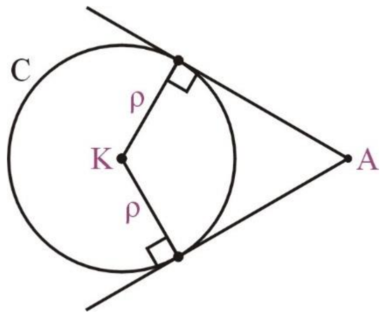
α) Ο κύκλος C έχει κέντρο το $K(2,3)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{4}=2$

Ακόμη είναι $(KA)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(4-2)^2+(7-3)^2}=\sqrt{20}>\rho$

οπότε το Α βρίσκεται έξω από τον κύκλο

β) Η εφαπτόμενη ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(4,7)$.
Συνεπώς το μόνο που χρειαζόμαστε ακόμη , προκειμένου να βρούμε την εξίσωση της , είναι ο συντελεστής διεύθυνσης (αν έχει)

Αν λοιπόν η ζητούμενη εφαπτόμενη ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ θα έχει εξίσωση $\varepsilon: y-y_o=\lambda(x-x_o)\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow y-7=\lambda(x-4)\Leftrightarrow y-7=\lambda x-4\lambda\Leftrightarrow \lambda x-y-4\lambda+7=0$

Η ε εφάπτεται στο κύκλο αν και μόνο αν

$$d(K,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow\frac{|\lambda\cdot 2-3-4\lambda+7|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\Leftrightarrow|-2\lambda+4|=2\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2}|-\lambda+2|=\cancel{2}\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow(-\lambda+2)^2=\sqrt{\lambda^2+1}^2\Leftrightarrow\cancel{\lambda^2}-4\lambda+4=\cancel{\lambda^2}+1\Leftrightarrow-4\lambda=-3\Leftrightarrow\lambda=\frac{3}{4}$$

Άρα η εφαπτόμενη έχει εξίσωση $\varepsilon:\frac{3}{4}x-y-\cancel{4}\frac{3}{\cancel{4}}+7=0\Leftrightarrow 3x-4y+16=0$

Από το $A(4,7)$ όμως διέρχεται και η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon_2: x=4$ η οποία από το κέντρο $K(2,3)$ απέχει απόσταση $d(K,\varepsilon_2)\overset{\varepsilon_2:x-4=0}{=}\rho\Leftrightarrow\frac{|2-4|}{\sqrt{1^2+0}}=2=\rho$ που σημαίνει ότι και η ευθεία ε_2 είναι εφαπτόμενη του κύκλου που διέρχεται από το Α

18.15 2)

α) Ο κύκλος C έχει κέντρο το $K(3,1)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$

Ακόμη είναι $(KA)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(0-1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}>\rho$

Οπότε το Α βρίσκεται έξω από τον κύκλο

β) Η εφαπτομένη ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(0,0)$. Συνεπώς το μόνο που χρειαζόμαστε ακόμη , προκειμένου να βρούμε την εξίσωσή της , είναι ο συντελεστής διεύθυνσης (αν έχει).

Αν λοιπόν η ζητούμενη εφαπτομένη ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , θα έχει εξίσωση :

$\varepsilon: y-y_o=\lambda(x-x_o)\Leftrightarrow y-0=\lambda(x-0)\Leftrightarrow y=\lambda x\Leftrightarrow\lambda x-y=0$

Η ε εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν :

$$d(\kappa,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow\frac{|\lambda\cdot 3-1|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|3\lambda-1|=\sqrt{2\lambda^2+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(3\lambda-1)^2=2\lambda^2+2\Leftrightarrow 9\lambda^2-6\lambda+1=2\lambda^2+2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7\lambda^2-6\lambda-1=0\quad\overset{\Delta=64,\ \lambda_{1,2}=\frac{6\pm8}{2\cdot7}\nearrow\frac{-1}{7}\ \searrow 1}{\Leftrightarrow}$$

Άρα , για $\lambda=\frac{-1}{7}$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y=-\frac{1}{7}x$

ενώ , για $\lambda=1$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y=x$

Από το $A(0,0)$ διέρχεται και η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon_3: x=0$, η οποία όμως από το κέντρο

$K(3,1)$ απέχει απόσταση $d(\kappa,\varepsilon_3)\overset{\varepsilon_3:x-0=0}{=}\frac{|3-0|}{\sqrt{1^2+0^2}}=3\neq\rho$

που σημαίνει ότι η ε_3 δεν είναι εφαπτομένη του κύκλου

18.15 3)

α) Ο κύκλος C έχει κέντρο το $K(-1,1)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{4}=2$

Ακόμη είναι $(KA)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1-(-1))^2+(-3-1)^2}=\sqrt{20}>\rho$

Οπότε το Α βρίσκεται έξω από τον κύκλο

β) Η εφαπτομένη ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(1,-3)$. Συνεπώς το μόνο

που χρειαζόμαστε ακόμη , προκειμένου να βρούμε την εξίσωσή της , είναι ο συντελεστής διεύθυνσης (αν έχει).

Αν λοιπόν η ζητούμενη εφαπτομένη ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , θα έχει εξίσωση :

$\varepsilon: y-y_o=\lambda(x-x_o)\Leftrightarrow y+3=\lambda(x-1)\Leftrightarrow \lambda x-y-\lambda-3=0$

Η ε εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν :

$d(\kappa,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow\frac{|\lambda\cdot(-1)-1-\lambda-3|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\Leftrightarrow|-2\lambda-4|=\sqrt{2\lambda^2+1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2|\lambda+2|=2\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow(\lambda+2)^2=\lambda^2+1\Leftrightarrow\lambda^2+4\lambda+4=\lambda^2+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\lambda=-3\Leftrightarrow\lambda=-\frac{3}{4}$

Άρα , η εφαπτομένη έχει εξίσωση : $\varepsilon:\frac{-3x}{4}-y+\frac{3}{4}-3=0\Leftrightarrow 3x+4y+9=0$

Από το $A(1,-3)$ διέρχεται και η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon_2: x=1$, η οποία όμως από το κέντρο

$K(-1,1)$ απέχει απόσταση $d(\kappa,\varepsilon_2)\overset{\varepsilon_2:x-1=0}{=}\frac{|-1-1|}{\sqrt{1^2+0^2}}=2=\rho$

που σημαίνει ότι η ε_2 είναι εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το Α

18.15 4)

α) Ο κύκλος C έχει κέντρο το $K(-1,0)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{20}$

Ακόμη είναι $(KA)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1-(-1))^2+(6-0)^2}=\sqrt{40}>\rho$

Οπότε το Α βρίσκεται έξω από τον κύκλο

β) Η εφαπτομένη ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(1,6)$. Συνεπώς το μόνο

που χρειαζόμαστε ακόμη , προκειμένου να βρούμε την εξίσωσή της , είναι ο συντελεστής διεύθυνσης (αν έχει).

Αν λοιπόν η ζητούμενη εφαπτομένη ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , θα έχει εξίσωση :

$\varepsilon: y-y_o=\lambda(x-x_o)\Leftrightarrow y-6=\lambda(x-1)\Leftrightarrow \lambda x-y-\lambda+6=0$

Η ε εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν :

$$d(\kappa,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda\cdot(-1)-1\cdot 0-\lambda+6|}{\sqrt{\lambda^2+(-1)^2}}=\sqrt{20}\Leftrightarrow \frac{|-2\lambda+6|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\sqrt{20}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2|\lambda-3|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2\sqrt{5}\Leftrightarrow(\lambda-3)^2=5(\lambda^2+1)\Leftrightarrow \lambda^2-6\lambda+9=5\lambda^2+5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2+6\lambda-4=0\Leftrightarrow 2\lambda^2+3\lambda-2=0\overset{\Delta=25}{\Leftrightarrow}\lambda_{1,2}=\frac{-3\pm5}{4}\begin{matrix}\nearrow -2\\ \searrow \frac{1}{2}\end{matrix}$$

Άρα , για $\lambda=-2$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση : $-2x-y+8=0$

ενώ , για $\lambda=\frac{1}{2}$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση : $\frac{1}{2}x-y-\frac{1}{2}+6=0\Leftrightarrow x-2y+11=0$

Από το $A(1,6)$ διέρχεται και η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon_3 : x=1$, η οποία όμως από το κέντρο

$K(-1,0)$ απέχει απόσταση $d(\kappa,\varepsilon_3)\overset{\varepsilon_3:x-1=0}{=}\frac{|-1-1|}{\sqrt{1^2+0}}=2\neq\rho$

που σημαίνει ότι η ε_3 δεν είναι εφαπτομένη του κύκλου

18.15 5)

α) Ο κύκλος C έχει κέντρο το $K(3,-2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{13}$

Ακόμη είναι $(KA)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(-2-3)^2+(-1-(-2))^2}=\sqrt{34}>\rho$

Οπότε το A βρίσκεται έξω από τον κύκλο

β) Η εφαπτομένη ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(-2,-1)$. Συνεπώς το μόνο

που χρειαζόμαστε ακόμη , προκειμένου να βρούμε την εξίσωσή της , είναι ο συντελεστής διεύθυνσης (αν έχει).

Αν λοιπόν η ζητούμενη εφαπτομένη ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , θα έχει εξίσωση :

$$\varepsilon: y-y_o=\lambda(x-x_o)\Leftrightarrow y+1=\lambda(x+2)\Leftrightarrow \lambda x-y+2\lambda-1=0$$

Η ε εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν :

$$d(\kappa,\varepsilon)=\rho\Leftrightarrow\frac{|\lambda\cdot3-(-2)+2\lambda-1|}{\sqrt{\lambda^2+1^2}}=\sqrt{13}\Leftrightarrow|5\lambda+1|=\sqrt{13}\cdot\sqrt{\lambda^2+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(5\lambda+1)^2=13(\lambda^2+1)\Leftrightarrow 25\lambda^2+10\lambda+1=13\lambda^2+13\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\lambda^2+10\lambda-12=0\Leftrightarrow 6\lambda^2+5\lambda-6=0\overset{\Delta=169}{\Leftrightarrow}\lambda_{1,2}=\frac{-3\pm13}{12}\begin{matrix}\nearrow \lambda=\frac{2}{3}\\ \searrow \lambda=-\frac{3}{2}\end{matrix}$$

Άρα , για $\lambda=\frac{2}{3}$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση : $\frac{2x}{3}-y+2\cdot\frac{2}{3}-1=0\Leftrightarrow 2x-3y+1=0$

ενώ , για $\lambda=\frac{3}{2}$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση : $\frac{-3x}{2}-y-2\cdot\frac{3}{2}-1=0\Leftrightarrow -3x+2y-8=0$

Από το $A\left(-2,-1\right)$ διέρχεται και η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon_3 : x = -2$, η οποία όμως από το κέντρο

$K\left(3,-2\right)$ απέχει απόσταση $d\left(\kappa,\varepsilon_3\right) \overset{\varepsilon_3:x+2=0}{=} \dfrac{\left|3+2\right|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 5 \neq \rho$

που σημαίνει ότι η ε_3 δεν είναι εφαπτομένη του κύκλου