

18.11 1)

Θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους

Η εξίσωση του κύκλου C_1 γίνεται

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση του κύκλου C_2 γίνεται

$$(x-6)^2 + (y-5)^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 - 10y + 25 = 20 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x - 10y + 41 = 0 \quad (2)$$

Αφαιρώντας τις εξισώσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$8x + 8y - 40 = 0 \Leftrightarrow 8x + 8y = 40 \Leftrightarrow x + y = 5 \Leftrightarrow y = 5 - x \quad (3)$$

Οπότε τώρα $(1) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} x^2 + (5-x)^2 - 4x - 2(5-x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x^2 - 10x + 25 - 4x - 10 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \Delta = 4, x_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow \\ \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 4 \\ \searrow x_2 = 2 \end{array} \end{array} \quad x = 4 \text{ ή } x = 2$$

για $x = 4 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} y = 5 - 4 \Rightarrow y = 1$ και για $x = 2 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} y = 5 - 2 \Rightarrow y = 3$

Οπότε οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία (τέμνονται) το $A(4,1)$ και το $B(2,3)$

18.11 2)

Θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους.

Η εξίσωση του κύκλου C_1 γίνεται :

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση του κύκλου C_2 γίνεται :

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0 \quad (2)$$

Αφαιρώντας τις εξισώσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε :

$$6x + 6y - 12 = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2 - x \quad (3)$$

Οπότε τώρα $(1) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} x^2 + (2-x)^2 + 2x - 2(2-x) - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4 - 4x + x^2 + 2x - 4 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Για $x = 1 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} y = 2 - 1 = 1$ και για $x = -1 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} y = 2 - (-1) = 3$

Οπότε οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία (τέμνονται) το $A(1,1)$ και το $B(-1,3)$

18.11 3)

Θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους.

Η εξίσωση του κύκλου C_1 γίνεται :

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 2y - 5 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση του κύκλου C_2 γίνεται :

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0 \quad (2)$$

Αφαιρώντας τις εξισώσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε :

$$12x + 6y = 0 \Leftrightarrow y = -2x \quad (3)$$

$$\text{Οπότε τώρα } (1) \xRightarrow{(3)} x^2 + (-2x)^2 + 4x + 2(-2x) - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 + 4x - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

$$\text{Για } x = 1 \xRightarrow{(3)} y = -2 \cdot 1 = -2 \text{ και για } x = -1 \xRightarrow{(3)} y = -2(-1) = 2$$

Οπότε οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία (τέμνονται) το $A(1, -2)$ και το $B(-1, 2)$

18.11 4)

Θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους.

Η εξίσωση του κύκλου C_1 γίνεται :

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση του κύκλου C_2 γίνεται :

$$(x-5)^2 + (y-4)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 8y + 33 = 0 \quad (2)$$

Αφαιρώντας τις εξισώσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε :

$$6x + 6y - 30 = 0 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 5 - x \quad (3)$$

$$\text{Οπότε τώρα } (1) \xRightarrow{(3)} x^2 + (5-x)^2 - 4x - 2(5-x) + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 25 - 10x + x^2 - 4x - 10 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \xRightarrow{\Delta=0} (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{Για } x = 3 \xRightarrow{(3)} y = 5 - 3 = 2$$

Οπότε οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο (εφάπτονται) το $A(3, 2)$

18.11 5)

Θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους.

Η εξίσωση του κύκλου C_1 γίνεται :

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση του κύκλου C_2 γίνεται :

$$(x+1)^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \quad (2)$$

Αφαιρώντας τις εξισώσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε :

$$-6x - 6y + 13 = 0 \Leftrightarrow x + y - \frac{13}{6} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{13}{6} - x \quad (3)$$

$$\text{Οπότε τώρα } (2) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} x^2 + \left(\frac{13}{6} - x\right)^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{169}{36} - \frac{13}{3}x + x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - \frac{7x}{3} + \frac{133}{36} = 0$$

$$\text{Είναι } \Delta = \left(-\frac{7}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{133}{36} \cdot 2 = -\frac{217}{9} < 0$$

Άρα η τελευταία εξίσωση δεν έχει λύση , οπότε και το σύστημα των εξισώσεων των δύο κύκλων είναι αδύνατο

Άρα οι δύο κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία