

18.10 1)

Θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ y = -3x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (-3x+16-2)^2 = 5 \\ y = -3x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (-3x+14)^2 = 5 \\ y = -3x+16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 + 9x^2 - 84x + 196 = 5 \\ y = -3x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2 - 90x + 200 = 0 \\ y = -3x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 20 = 0 \\ y = -3x+16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Delta=1, x_{1,2}=\frac{9\pm1}{2} \Rightarrow x_1=5, x_2=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \text{ ή } x=4 \\ y=-3x+16 \end{cases}$$

για $x=5$ έχουμε $y=-3\cdot5+16 \Rightarrow y=1$ και για $x=4$ έχουμε $y=-3\cdot4+16 \Rightarrow y=4$

Οπότε ο κύκλος και η ευθεία έχουν δύο κοινά σημεία (τέμνονται) το $A(5,1)$ και το $B(4,4)$

18.10 2)

Θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y+2)^2 = 10 \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (x-2+2)^2 = 10 \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + x^2 = 10 \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 16 + x^2 = 10 \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 = 0 \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Delta=4, x_{1,2}=\frac{4\pm2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \text{ ή } x=1 \\ y=x-2 \end{cases}$$

Για $x=3$ έχουμε $y=1$ και για $x=1$ έχουμε $y=1-2=-1$

Οπότε η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία (τέμνονται) το $A(3,1)$ και το $B(1,-1)$

18.10 3)

Θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} (x+4)^2 + (y-4)^2 = 10 \\ y = 2x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 + (2x+7-4)^2 = 10 \\ y = 2x+7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 + (2x+3)^2 = 10 \\ y = 2x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 8x + 16 + 4x^2 + 12x + 9 = 10 \\ y = 2x+7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 20x + 25 = 10 \\ y = 2x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 0 \\ y = 2x+7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Delta=4, x_{1,2}=\frac{-4\pm2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \text{ ή } x=-1 \\ y=2x+7 \end{cases}$$

Για $x=-3$ έχουμε $y=2\cdot(-3)+7=1$ και για $x=-1$ έχουμε $y=2\cdot(-1)+7=5$

Οπότε η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία : το $A(-3,1)$ και το $B(-1,5)$

18.10 4)

Θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-x-2)^2 = 4 \\ y = -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x^2 + 4x + 4 = 4 \\ y = -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 4x = 0 \\ y = -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x+2) = 0 \\ y = -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = -2 \\ y = -x - 2 \end{cases}$$

Για $x = 0$ έχουμε $y = -0 - 2 = -2$ και για $x = -2$ έχουμε $y = -(-2) - 2 = 0$

Οπότε η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία : το $A(0, -2)$ και το $B(-2, 0)$

18.10 5)

Θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (-x+6-1)^2 = 2 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (-x+5)^2 = 2 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + x^2 - 10x + 25 = 2 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 12x + 24 = 2 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 12 = 0 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Delta = -12 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 12 \\ y = -x + 6 \end{cases} \text{ δε μηδενίζεται}$$

Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι αδύνατο. Άρα δεν υπάρχουν κοινά σημεία της ευθείας και του κύκλου

18.10 6)

Θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ y = -x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (-x+7-1)^2 = 8 \\ y = -x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (-x+6)^2 = 8 \\ y = -x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 + x^2 - 12x + 36 = 8 \\ y = -x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 16x + 32 = 0 \\ y = -x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 16 = 0 \\ y = -x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 = 0 \\ y = -x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -4 + 7 = 3 \end{cases}$$

Οπότε η ευθεία και ο κύκλος έχουν ένα κοινό σημείο : το $A(4, 3)$