Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 17.7

ΘΕΜΑ 1

Α) **α)** Σ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ

Β) Ίδιο με διαγώνισμα 17.2 ΘΕΜΑ 1. Β

ΘΕΜΑ 2

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συντελεστές των x και y στις εξισώσεις των δύο ευθειών δε μηδενίζονται ταυτόχρονα.

Για την (1) έχουμε : $\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=1\end{cases}$

Για την (2) έχουμε : $\begin{cases}3\lambda+1=0\\ -2\lambda=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-\dfrac{1}{3}\\ \lambda=0\end{cases}$

Άρα οι δύο εξισώσεις παριστάνουν ευθείες , για κάθε $\lambda\in R$

β) Η ευθεία (1) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=-\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$

Η ευθεία (2) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=-\dfrac{3\lambda+1}{2\lambda}$

$(\lambda\neq 0)$

Για να είναι οι ευθείες κάθετες , θα πρέπει :

$\lambda_1\cdot\lambda_2=-1\Rightarrow-\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\cdot\dfrac{3\lambda+1}{2\lambda}=-1\Rightarrow 3\lambda+1=2\lambda-2\Rightarrow\lambda=-3$

Επίσης παρατηρούμε ότι για $\lambda=0$, οι δύο ευθείες γράφονται $y=4$ και $x=7$ αντίστοιχα , άρα είναι κάθετες.

Επομένως οι δύο ευθείες είναι κάθετες για $\lambda=-3$ και για $\lambda=0$

ΘΕΜΑ 3

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα 3 σημεία δεν είναι συνευθειακά , δηλαδή $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{B\Gamma}$

Είναι : $\overrightarrow{AB}=(0-(-2),1-2)=(2,-1)$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=(1-0,-1-1)=(1,-2)$

Έστω ότι υπάρχει $K\in R$, τέτοιο ώστε

$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{B\Gamma}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=K\overrightarrow{B\Gamma}\Rightarrow(2,-1)=K(1,-2)\Rightarrow\begin{cases}K=2\\ K=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ άτοπο

Άρα τα τρία σημεία δεν είναι συνευθειακά και συνεπώς σχηματίζουν τρίγωνο

β) Είναι $A\Delta\perp B\Gamma\Rightarrow\lambda_{A\Delta}=-\dfrac{1}{\lambda_{B\Gamma}}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}$, και αφού η ΑΔ διέρχεται από το $A(-2,2)$,

θα έχει εξίσωση : $y-2=\dfrac{1}{2}(x-(-2))\Rightarrow 2y-4=x+2\Rightarrow 2y-x-6=0$

γ) Η ΒΑ έχει εξίσωση : $y-1=\lambda_{AB}(x-0)\Rightarrow y-1=-\dfrac{1}{2}x\Rightarrow x+2y-2=0$

Η ΒΓ έχει εξίσωση : $y-1=\lambda_{B\Gamma}(x-0)\Rightarrow y-1=-2(x-0)\Rightarrow 2x+y-1=0$

Ουσιαστικά ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις ΒΑ , ΒΓ

Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο της διχοτόμου. Τότε : $d(M,BA)=d(M,B\Gamma)\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{|x+2y-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|2x+y-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}\Rightarrow|x+2y-2|=|2x+y-1|\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y-2=2x+y-1 \\ \text{ή} \\ x+2y-2=-2x-y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+1=0 \\ \text{ή} \\ 3x+3y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+1=0 \\ \text{ή} \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

Άρα οι ζητούμενες διχοτόμοι είναι οι : $x-y+1=0$ και $x+y-1=0$

ΘΕΜΑ 4

α) Χωρίζουμε το πολύγωνο ΟΑΒΓΔ σε τρία τρίγωνα , τα ΟΑΔ , ΟΔΓ και ΑΒΓ

Οπότε $(\text{ΟΑΒΓΔ})=(\text{ΟΑΔ})+(\text{ΑΔΓ})+(\text{ΑΒΓ})$

Το ΟΑΔ είναι ορθογώνιο άρα $(\text{ΟΑΔ})=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 8=12$

Είναι : $(\text{ΑΔΓ})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\text{ΑΔ}},\overrightarrow{\text{ΑΓ}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 8-0 & 0-3 \\ 8-0 & 2-3 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|-8+3\cdot 8\right|=8$

Και : $(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\text{ΑΒ}},\overrightarrow{\text{ΑΓ}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2-0 & 8-3 \\ 8-0 & 2-3 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|-2-5\cdot 8\right|=21$

Οπότε : $(\text{ΟΑΒΓΔ})=12+8+21=41$

β) Η ΒΓ έχει εξίσωση :

$y-2=\frac{2-8}{8-2}(x-8)\Rightarrow y-2=-(x-8)\Rightarrow y+x-10=0$

Παρατηρούμε ότι είναι : $5+5-10=0$ που ισχύει , άρα το $\text{Μ}(5,5)$ ανήκει στην ΒΓ

γ) Έστω ότι η ζητούμενη ευθεία τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $\text{Κ}(x,0)$

Τότε θα πρέπει : $(\text{ΚΕΓ})+(\text{ΚΓΔ})=(\text{ΚΒΕ})+(\text{ΚΟΑ})+(\text{ΚΑΒ})\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 5-x & 5 \\ 8-x & 2 \end{vmatrix}\right|+\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 8-x & 2 \\ 8-x & 0 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -x & 0 \\ -x & 3 \end{vmatrix}\right|+\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2-x & 8 \\ 5-x & 5 \end{vmatrix}\right|+\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -x & 3 \\ 2-x & 8 \end{vmatrix}\right|\Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}|3x-30|}+\frac{1}{2}|-16+2x|=\frac{1}{2}|-3x|+\cancel{\frac{1}{2}|3x-30|}+\frac{1}{2}|-5x-6|\Rightarrow$

$\underset{\substack{x<8 \\ x>-\frac{6}{5}}}{\overset{x>0}{\Rightarrow}} 8-x=\frac{3x}{2}+\frac{1}{2}(5x+6)\Rightarrow 16-2x=3x+5x+6\Rightarrow x=1$

Άρα είναι $\text{Κ}(1,0)$, και αφού η ζητούμενη ευθεία διέρχεται και από το $\text{Ε}(5,5)$,

θα έχει εξίσωση : $y-0=\frac{5-0}{5-1}(x-1)\Rightarrow y=\frac{5}{4}(x-1)$