

ΘΕΜΑ 1

A) α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

B) Ένα σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό του $A(x_0, y_0)$ ανήκει στην ε , αν και μόνο αν το $\overline{AM}$ είναι παράλληλο στην ε , δηλαδή αν και μόνο αν το $\overline{AM}$ και η ε έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Επειδή $\overline{AM} = (x - x_0, y - y_0)$, έχουμε :

$$\lambda_{\overline{AM}} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \text{Επομένως το } M(x, y) \text{ ανήκει στην } \varepsilon \text{ αν και μόνο αν } \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lambda \quad \text{ή}$$

$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, που επαληθεύεται και από το σημείο A.

ΘΕΜΑ 2

α) Λύνουμε τα συστήματα των εξισώσεων των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x - 2(6 - 2x) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Άρα είναι $M(2, 2)$

β) Παρατηρούμε ότι $3 \cdot 2 - 2 = 4$ ισχύει. Άρα το $M \in \varepsilon_3$. Συνεπώς και οι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, το $M(2, 2)$

ΘΕΜΑ 3

α) Η ευθεία ΑΠ είναι κάθετη στην ΠΣ, άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $+1$ και αφού διέρχεται από το $A(2, 3)$, θα έχει εξίσωση :

$$y - 3 = +1(x - 2) \Rightarrow y = x + 1$$

β) Το Π είναι το σημείο τομής των ΑΠ και ΠΣ. Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Άρα το σημείο Π έχει συντεταγμένες $\Pi(-1, 0)$

γ) Έστω $B(x, y)$. Το Π είναι το μέσο του AB, άρα έχουμε :

$$\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2} \right) = (-1, 0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{2} = -1 \\ \frac{y+3}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

Άρα είναι $B(-4, -3)$

Συνεπώς η MB έχει εξίσωση :

$$y - 1 = \frac{-3 - 1}{-4 - 1}(x - 1) \Rightarrow y - 1 = \frac{4}{5}(x - 1) \Rightarrow 5y - 4x - 1 = 0$$

Το Σ είναι το σημείο τομής των MB, ΠΣ. Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 5y - 4x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Άρα το Σ έχει συντεταγμένες $\Sigma\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

ΘΕΜΑ 4

- α) Διαλέγουμε τυχαία δύο τιμές για το λ , έστω $\lambda = 0$ και $\lambda = 1$ και λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων που προκύπτουν :

$$\begin{cases} 0 \cdot x - y + 0 + 2 = 0 \\ 1 \cdot x - y + 1 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε : $\lambda \cdot 1 - 2 + \lambda + 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ που ισχύει

Άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $\lambda x - y + \lambda + 2 = 0$ παριστάνει ευθεία που διέρχεται

Από το σταθερό σημείο $A(1,2)$

- β) Για $x = 0$, $y = 3$ στην (1) έχουμε : $0 \cdot 1 - 3 + \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

Άρα η ε_1 έχει εξίσωση : $x - y + 3 = 0$

- γ) Η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = -2$

Αφού η ζητούμενη ευθεία είναι κάθετη στην ε_2 , θα έχει συντελεστή διεύθυνσης :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \quad \text{άρα η } \varepsilon_2 \text{ έχει εξίσωση } \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2} + 2 = 0 \Rightarrow x - 2y + 5 = 0$$

- δ) Θα είναι $\cos(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \cos(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \Rightarrow \frac{(1,1) \cdot (2,1)}{\sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{2^2+1^2}} = \frac{(1,1) \cdot (1,\lambda)}{\sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+\lambda^2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{1+\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \Rightarrow \frac{9}{5} = \frac{1+\lambda^2+2\lambda}{1+\lambda^2} \Rightarrow 9\lambda^2+9=5+5\lambda^2+10\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\lambda^2-10\lambda+4=0 \Rightarrow 2\lambda^2-5\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=2 \quad \text{ή} \quad \lambda=\frac{1}{2}$$

Άρα προκύπτουν δύο ευθείες, η $2x - y + 4 = 0$ και η $\frac{1}{2}x - y + \frac{5}{2} = 0$