

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 17.4**ΘΕΜΑ 1**

A) α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ

B) Έστω ε μία ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο.

– Αν η ε τέμνει τον $y'y$ στο $\Sigma(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ ,

τότε θα έχει εξίσωση $y = \lambda x + \beta$, η οποία γράφεται $\lambda x + (-1)y + \beta = 0$

– Αν η ε είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0)$, τότε θα έχει

εξίσωση $x = x_0$, που γράφεται ισοδύναμα: $x + 0 \cdot y + (-x_0) = 0$

Επομένως και στις δύο περιπτώσεις, η εξίσωση της ε είναι της μορφής:

$Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

ΘΕΜΑ 2

α) Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ε_1 και ε_2 :

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = 5 - 3x \\ x + 5 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 3 \end{cases}$$

Άρα το M έχει συντεταγμένες $M(3, 4)$

β) Η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = 1$, άρα η ζητούμενη κάθετη στην ε_2 ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης -1 . Επιπλέον διέρχεται από το $M(3, 4)$, άρα έχει εξίσωση:

$$y - 4 = -1(x - 3) \Rightarrow y = -x + 7$$

γ) Η ε_1 γράφεται $3x - y - 5 = 0$ που είναι της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$, με

$A = 3$, $B = -1$. Άρα η ε_1 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A) = (1, 3)$

ΘΕΜΑ 3

Αφού οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης.

$$\text{Άρα θα είναι: } \frac{-\alpha}{1} = -\frac{2}{2} \Rightarrow \alpha = 1$$

Αφού είναι παράλληλες, όλα τα σημεία της μίας ευθείας απέχουν ίδια απόσταση από την

Δεύτερη. Η $\varepsilon_1: x + y + 1 = 0$ διέρχεται από το $A(0, -1)$

$$\text{Άρα έχουμε: } d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2\sqrt{2} \Rightarrow d(A, \varepsilon_2) = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{|2 \cdot 0 + 2(-1) + \beta|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\beta - 2| = 2 \cdot 4 \Rightarrow \begin{cases} \beta - 2 = 8 \\ \text{ή} \\ \beta - 2 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 10 \\ \text{ή} \\ \beta = -6 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 4

α) Η ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1 = \frac{-\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{v}} = -\frac{v}{\mu}$

και η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = \frac{-\frac{1}{v}}{\frac{1}{\mu}} = -\frac{\mu}{v}$

Είναι $\mu \neq \pm v$, άρα $\lambda_1 \neq \lambda_2$, δηλαδή οι δύο ευθείες δεν είναι παράλληλες.

Συνεπώς τέμνονται

β) Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:

$$\begin{cases} \frac{x}{\mu} + \frac{y}{v} = 1 \\ \frac{x}{v} + \frac{y}{\mu} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} vx + \mu y = \mu v \\ \mu x + v y = \mu v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mu - \frac{\mu}{v} y \\ \mu \left(\mu - \frac{\mu}{v} y \right) + v y = \mu v \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \mu - \frac{\mu}{v} y \\ \mu^2 - \frac{\mu^2}{v} y + v y = \mu v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mu - \frac{\mu}{v} y \\ y \left(v - \frac{\mu^2}{v} \right) = \mu v - \mu^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \mu - \frac{\mu}{v} y \\ y = \frac{\mu v^2 - \mu^2 v}{v^2 - \mu^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mu - \frac{\mu}{v} y \\ y = \frac{\mu v (v - \mu)}{(v - \mu)(\mu + v)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\mu v}{\mu + v} \\ y = \frac{\mu v}{\mu + v} \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι το : $M \left(\frac{\mu v}{\mu + v}, \frac{\mu v}{\mu + v} \right)$

γ) Η ΑΜ έχει εξίσωση : $y - v = \frac{v - \frac{\mu v}{\mu + v}}{\mu - \frac{\mu v}{\mu + v}} (x - \mu) \Rightarrow y - v = \frac{v^2}{\mu^2} (x - \mu) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu^2 y - \mu^2 v = v^2 x - v^2 \mu \Rightarrow vx^2 - \mu^2 y - \mu v^2 + v \mu^2 = 0$$