

## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 17.3

### ΘΕΜΑ 1

A) α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

B) Αν  $B \neq 0$ , η  $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = \frac{-B}{A}$  και

επομένως είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$

Αν  $B = 0$ , τότε η  $\varepsilon$  είναι παράλληλη προς τον άξονα  $y'y$  και επομένως παράλληλη

Και πάλι στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, η  $\varepsilon$  είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$

### ΘΕΜΑ 2

α) Το  $\Gamma$  είναι το σημείο τομής των πλευρών  $ΑΓ$ ,  $ΒΓ$ . Άρα λύνουμε το σύστημα των

$$\text{εξισώσεων τους: } \begin{cases} y = -x + 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ -\frac{1}{2}x + 2 = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Άρα το  $\Gamma$  έχει συντεταγμένες  $\Gamma(4,0)$

β) i) Η  $ΑΓ$  έχει εξίσωση:  $y = -x + 4$ , άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = -1$

ii) Είναι  $ΒΔ \perp ΑΓ \Rightarrow \lambda_{ΒΔ} = -\frac{1}{\lambda} = \frac{-1}{-1} = 1$  και αφού η  $ΒΔ$ , διέρχεται από το  $B(2,1)$

θα έχει εξίσωση:  $y - 1 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1$

### ΘΕΜΑ 3

Το  $\Gamma$  ανήκει στην  $\varepsilon: x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = x - 1$

Άρα αν είναι:  $\Gamma(x, y)$ , έχουμε:  $\Gamma(x, x - 1)$

Οπότε:  $\overrightarrow{AB} = (2 - 1, 1 - 2) = (1, -1)$  και  $\overrightarrow{AG} = (x - 1, x - 1 - 2) = (x - 1, x - 3)$

Το  $AB\Gamma$  έχει εμβαδόν 1, άρα έχουμε:  $(AB\Gamma) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})| = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x-1 & x-3 \end{vmatrix} \right| = 2 \Rightarrow |x - 3 + x - 1| = 2 \Rightarrow |2x - 4| = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 2 \\ \text{ή} \\ 2x - 4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ή} \\ x = 1 \end{cases}$$

Άρα είναι είτε  $\Gamma(3,2)$  είτε  $\Gamma(1,0)$

### ΘΕΜΑ 4

α) Έχουμε:  $A(x - y) + B(x + y) = 2B \Rightarrow$

$$\Rightarrow Ax - Ay + Bx + By = 2B \Rightarrow (A + B)x + (B - A)y = 2B \Rightarrow (A + B)x + (B - A)y - 2B = 0$$

Που είναι της μορφής  $A'x + B'y + \Gamma = 0$ , άρα η εξίσωση παριστάνει ευθεία

(προφανώς τα  $A'$  και  $B'$  δε μηδενίζονται ταυτόχρονα, καθώς τότε θα ήταν  $A = 0 = B$  και τότε η αρχική εξίσωση  $Ax + By = A + B$ , δεν θα παρίστανε ευθεία).

β) Για να βρούμε το σημείο τομής των δύο ευθειών, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} Ax + By = A + B \\ (A + B)x + (B - A)y - 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{A + B - By}{A} \\ (A + B) \frac{(A + B - By)}{A} + (B - A)y - 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{A + B - By}{A} \\ \frac{(A + B)^2}{A} - \frac{B(A + B)}{A}y + (B - A)y - 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{A + B - By}{A} \\ y \left( B - A - \frac{B}{A}(A + B) \right) = 2B - \frac{(A + B)^2}{A} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{A + B - By}{A} \\ y = \frac{2B \cdot A - (A + B)^2}{AB - A^2 - B(A + B)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το  $K(1,1)$

γ) Η ευθεία  $Ax + By = A + B$  είναι παράλληλη προς το διάνυσμα  $\vec{\delta_1} = (B, -A)$

Η ευθεία  $(A + B)x + (B - A)y - 2B = 0$ , είναι παράλληλη προς το διάνυσμα

$\vec{\delta_2} = (B - A, -(A + B))$ . Η γωνία των δύο ευθειών ταυτίζεται με την γωνία των δύο διανυσμάτων. Έχουμε :

$$\cos(\vec{\delta_1}, \vec{\delta_2}) = \frac{\vec{\delta_1} \cdot \vec{\delta_2}}{|\vec{\delta_1}| \cdot |\vec{\delta_2}|} = \frac{B(B - A) + A(A + B)}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{(B - A)^2 + (A + B)^2}} =$$

$$= \frac{B^2 - AB + A^2 + AB}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB + A^2 + 2AB + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα η γωνία των δύο ευθειών είναι  $45^\circ$