

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 17.2

ΘΕΜΑ 1

- A) α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ 2

- α) i) Η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης : $\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-5}{6-0} = -1$
 και αφού διέρχεται από το $A(0,5)$, έχει εξίσωση : $y-5 = \lambda(x-0) \Rightarrow y = -x+5$
 ii) Το μέσο M του AB έχει συντεταγμένες: $M\left(\frac{0+6}{2}, \frac{5-1}{2}\right) \Rightarrow M(3,2)$
 β) Η μεσοκάθετη ευθεία του AB έχει συντελεστή διεύθυνσης 1 και διέρχεται από το M, άρα έχει εξίσωση : $y-2 = 1(x-3) \Rightarrow y = x-1$

ΘΕΜΑ 3

- α) Η ε_1 έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{\alpha}{\beta} = \lambda_1$
 Η ε_2 έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{\alpha}{\beta} = \lambda_2$
 Είναι : $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \varepsilon_1 // \varepsilon_2$
 β) Ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις ε_1 και ε_2
 Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Τότε :

$$d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2) \Rightarrow \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{|\alpha x + \beta y + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = \alpha x + \beta y + \delta & \text{αδύνατη, αφού } \gamma \neq \delta \\ \alpha x + \beta y + \gamma = -\alpha x - \beta y - \delta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha x + 2\beta y + 2(\gamma + \delta) = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y + \left(\frac{\gamma + \delta}{2}\right) = 0$$

 γ) Οι : $2x + 3y - 1 = 0$ και $2x + 3y + 5 = 0$ είναι παράλληλες.
 Άρα ισχύει ο τύπος που αποδείξαμε παραπάνω, με $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = -1$, $\delta = 5$
 Άρα η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των δύο ευθειών είναι η :

$$\varepsilon : 2x + 3y + \left(\frac{5-1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2x + 3y + 2 = 0$$

ΘΕΜΑ 4

- Έστω : $B(x_B, y_B)$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$
 Τα B, Γ ανήκουν στην ευθεία $2x - y - 6 = 0$
 άρα είναι : $y_B = 2x_B - 6$ και $y_\Gamma = 2x_\Gamma - 6$
 Το ABΓ είναι ισοσκελές, άρα ισχύει : $|\overline{AB}| = |\overline{AG}| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_B - 6)^2 (2x_B - 6 - 1)^2} = \sqrt{(x_\Gamma - 6)^2 (2x_\Gamma - 6 - 1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_B - 6)^2 + (2x_B - 7)^2 = (x_\Gamma - 6)^2 + (2x_\Gamma - 7)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B^2 - 12x_B + 36 + 4x_B^2 - 28x_B + 49 = x_\Gamma^2 - 12x_\Gamma + 36 + 4x_\Gamma^2 - 28x_\Gamma + 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_B^2 - x_\Gamma^2) - 8(x_B - x_\Gamma) = 0 \Rightarrow (x_B - x_\Gamma)(x_B + x_\Gamma) - 8(x_B - x_\Gamma) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_B - x_\Gamma)(x_B + x_\Gamma - 8) = 0 \Rightarrow x_B = x_\Gamma \text{ αδύνατο ή } x_B + x_\Gamma - 8 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Το } AB\Gamma \text{ έχει εμβαδόν } 5, \text{ άρα είναι : } \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma} \end{pmatrix} \right| = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_B - 6 & 2x_B - 6 - 1 \\ x_\Gamma - 6 & 2x_\Gamma - 6 - 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_B - 6)(2x_\Gamma - 7) - (x_\Gamma - 6)(2x_B - 7) = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} (8 - x_\Gamma - 6)(2x_\Gamma - 7) - (x_\Gamma - 6)(2(8 - x_\Gamma) - 7) \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 - x_\Gamma)(2x_\Gamma - 7) - (x_\Gamma - 6)(9 - 2x_\Gamma) = 10 \Rightarrow \dots \Rightarrow |-10x_\Gamma + 40| = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10x_\Gamma + 40 = 10 \\ \text{ή} \\ -10x_\Gamma + 40 = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x_\Gamma = 30 \\ \text{ή} \\ 10x_\Gamma = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_\Gamma = 3 \\ \text{ή} \\ x_\Gamma = 5 \end{cases}$$

$$\text{Για } x_\Gamma = 3, \text{ στην (1), έχουμε : } x_B + 3 - 8 = 0 \Rightarrow x_B = 5$$

$$\text{Και } y_B = 2x_B - 6 = 10 - 6 = 4 \text{ και } y_\Gamma = 2x_\Gamma - 6 = 2 \cdot 3 - 6 = 0$$

$$\text{Άρα είναι : } B(5, 4), \Gamma(3, 0)$$

$$\text{Για } x_\Gamma = 5, \text{ στην (1) έχουμε } x_B + 5 - 8 = 0 \Rightarrow x_B = 3 \text{ (συνέχεια συμμετρικά)}$$

$$\text{Επομένως είναι } B(5, 4) \text{ και } \Gamma(3, 0)$$