

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 17.1

ΘΕΜΑ 1

Α) α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

Β) Η ευθεία που διέρχεται από το Α, Β είναι παράλληλη στο διάνυσμα :

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \text{ και είναι } \lambda_\varepsilon = \lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Άρα, αφού διέρχεται από το Α(x₁, y₁) έχει εξίσωση :

$$y - y_1 = \lambda_\varepsilon (x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

ΘΕΜΑ 2

α) i) Η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης : $\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{2-1} = 2$

ii) Η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης 2 και διέρχεται από το Α(1,1),

$$\text{άρα έχει εξίσωση : } y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$$

β) Εξετάζουμε αν : $2 \cdot 2^{100} - 1 = 5 \Rightarrow 2^{101} = 6$ προφανώς δεν ισχύει άρα το $\Gamma(2^{100}, 5)$ δεν ανήκει στην ε

ΘΕΜΑ 3

α) Είναι : $\overrightarrow{AB} = (4-2, -1-3) = (2, -4)$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (0-(-2), 5-9) = (2, -4)$

Άρα : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$, δηλαδή το ΑΒΓΔ έχει δύο απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες, άρα είναι παραλληλόγραμμο

β) Χωρίζουμε το ΑΒΓΔ σε δύο (ισεμβαδικά) τρίγωνα, τα : $\left(A \overset{\Delta}{\Delta} \Gamma \right), \left(A \overset{\Delta}{B} \Gamma \right)$

$$\text{Τότε : } (AB\Gamma\Delta) = (A\Delta\Gamma) + (AB\Gamma) \Rightarrow (AB\Gamma\Delta) = 2(A\Delta\Gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB\Gamma\Delta) = 2 \cdot \frac{1}{2} \left| \det \left(\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{A\Gamma} \right) \right| \Rightarrow (AB\Gamma\Delta) = \left| \begin{vmatrix} -2-2 & 9-3 \\ 0-2 & 5-3 \end{vmatrix} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB\Gamma\Delta) = \left| -4 \cdot 2 - 6(-2) \right| \Rightarrow (AB\Gamma\Delta) = |4| = 4$$

ΘΕΜΑ 4

α) Η ε₁ έχει εξίσωση : $y - 1 = \lambda(x - 3) \Rightarrow y = \lambda x - 3\lambda + 1$

Η ε₂ ⊥ ε₁, άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{1}{\lambda}$ και αφού διέρχεται από το Α(3,1), θα έχει

$$\text{εξίσωση : } y - 1 = -\frac{1}{\lambda}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{\lambda}x + \frac{3}{\lambda} + 1$$

- Για $y = 0$ στην ε₁ : $\lambda x - 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3\lambda - 1}{\lambda}$

$$\text{Άρα η } \varepsilon_1 \text{ τέμνει τον άξονα } x'x \text{ στο } B\left(\frac{3\lambda - 1}{\lambda}, 0\right)$$

- Για $x = 0$ στην ε₂ : $y = \frac{3}{\lambda} + 1 = \frac{3 + \lambda}{\lambda}$

$$\text{Άρα η } \varepsilon_2 \text{ τέμνει τον άξονα } y'y \text{ στο } \Gamma\left(0, \frac{3 + \lambda}{\lambda}\right)$$

Άρα το μέσο M του ΒΓ έχει συντεταγμένες :

$$M\left(\frac{\frac{3\lambda-1}{\lambda}+0}{2}, \frac{\frac{3+\lambda}{\lambda}+0}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3\lambda-1}{2\lambda}, \frac{3+\lambda}{2\lambda}\right)$$

β) Είναι : $\overrightarrow{PM} = \left(\frac{3\lambda-1}{2\lambda} - (-1), \frac{3+\lambda}{2\lambda} - (-2)\right) \Rightarrow \overrightarrow{PM} = \left(\frac{5\lambda-1}{2\lambda}, \frac{3+5\lambda}{2\lambda}\right)$

$$\text{Άρα : } |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{\left(\frac{5\lambda-1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3+5\lambda}{2\lambda}\right)^2} \Rightarrow |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{\frac{25\lambda^2 + 10\lambda + 5}{2\lambda^2}}$$

Η απόσταση ελαχιστοποιείται για το λ που ελαχιστοποιεί το τριώνυμο του αριθμητή ,
καθώς η $\frac{1}{2\lambda^2}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του λ

$$\text{Το τριώνυμο } 25\lambda^2 + 10\lambda + 5 \text{ ελαχιστοποιείται για } \lambda = \left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = \frac{-10}{2 \cdot 25} = -\frac{1}{5}$$