

16.Δ1

Έστω : $B(x_1, y_1)$ και $\Delta(x_2, y_2)$

Έχουμε : $|\overline{AB}|^2 + |\overline{B\Gamma}|^2 = |\overline{A\Gamma}|^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1-1)^2 + (y_1-1)^2}^2 + \sqrt{(x_1-5)^2 + (y_1-3)^2}^2 = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2 - 2x_1 + y_1^2 - 2y_1 + 2 + x_1^2 - 10x_1 + 25 + y_1^2 - 6y_1 + 9 = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x_1^2 + 2y_1^2 - 12x_1 - 8y_1 + 16 = 0 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 - 6x_1 - 4y_1 + 8 = 0 \quad (1)$$

Επίσης είναι : $|\overline{AB}| = |\overline{B\Gamma}| \Rightarrow \sqrt{(x_1-1)^2 + (y_1-1)^2} = \sqrt{(5-x_1)^2 + (3-y_1)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1^2 - 2x_1 + 1 + y_1^2 - 2y_1 + 1 = 25 - 10x_1 + x_1^2 + 9 - 6y_1 + y_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x_1 + 4y_1 - 32 = 0 \Rightarrow 2x_1 + y_1 - 8 = 0 \Rightarrow y_1 = 8 - 2x_1 \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε : $x_1^2 + (8 - 2x_1)^2 - 6x_1 - 4(8 - 2x_1) + 8 = 0$

Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε : $x_1 = 2$ (οπότε $y_1 = 4$) ή $x_1 = 4$ (οπότε $y_1 = 0$)

Άρα είναι : $B(2, 4)$ και $\Gamma(4, 0)$

16.Δ2

Έστω : $B(x_1, y_1)$ και $\Gamma(x_2, y_2)$

Το μέσο M του AB έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{x_1+1}{2}, \frac{y_1+7}{2}\right)$

Το M ανήκει στη διάμεσο $y=1$, άρα είναι $\frac{y_1+7}{2} = 1 \Rightarrow y_1 = -5$

Επίσης το B ανήκει στην άλλη διάμεσο , άρα είναι :

$$9x_1 + 7y_1 - 1 = 0 \Rightarrow 9x_1 + 7 \cdot (-5) - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$$

Άρα είναι $B(4, -5)$

Το μέσο N του AΓ έχει συντεταγμένες : $N\left(\frac{x_2+1}{2}, \frac{y_2+7}{2}\right)$

Το N ανήκει στη διάμεσο $9x + 7y - 28 = 0$, άρα είναι : $9\left(\frac{x_2+1}{2}\right) + 7\left(\frac{y_2+7}{2}\right) - 28 = 0$

Όμως το $\Gamma(x_2, y_2)$ ανήκει στην $y=1$, άρα είναι $y_2 = 1$

Οπότε έχουμε : $9\left(\frac{x_2+1}{2}\right) + 7\left(\frac{1+7}{2}\right) - 28 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$

Άρα είναι : $\Gamma(-1, 1)$. Επομένως η BΓ έχει εξίσωση :

$$y - 1 = \frac{1 - (-5)}{-1 - 4}(x - (-1)) \Rightarrow 5y + 6x + 1 = 0$$

16.Δ3

α) Το μέσο Δ της ΒΓ έχει συντεταγμένες $\Delta\left(\frac{0+4}{2}, \frac{2+0}{2}\right) \Rightarrow \Delta(2,1)$

$$\text{Άρα } \lambda_{\Delta\Lambda} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

Η ε που είναι κάθετη στην ΑΔ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$

Άρα η ε, που διέρχεται από το Α, έχει εξίσωση: $y-0 = -2(x-0) \Rightarrow y = -2x$

β) Η πλευρά ΒΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda_{\text{ΒΓ}} = \frac{0-2}{4-0} = -\frac{1}{2}$

Άρα η ε₁ που είναι κάθετη στην ΒΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$

Και αφού διέρχεται από το Ε(α, 4α), θα έχει εξίσωση: $y-4\alpha = 2(x-\alpha) \Rightarrow y = 2x + 2\alpha$

γ) Για y = 0 είναι $0 = 2x + 2\alpha \Rightarrow x = -\alpha$

Άρα η ε₁ τέμνει τον x'x στο Κ(-α, 0)

Για x = 0 είναι $y = 2 \cdot 0 + 2\alpha \Rightarrow y = 2\alpha$

Άρα η ε₁ τέμνει τον y'y στο Λ(0, 2α)

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ε, ε₁:

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = 2x + 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -2x = 2x + 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x = -\frac{1}{2}\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \alpha \\ x = -\frac{1}{2}\alpha \end{cases}$$

Άρα η ε₁ τέμνει την ε στο Μ $\left(-\frac{1}{2}\alpha, \alpha\right)$

Το μέσο του ΚΛ έχει συντεταγμένες: $\left(\frac{0-\alpha}{2}, \frac{2\alpha+0}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\alpha, \alpha\right)$

Άρα πράγματι, το Μ είναι το μέσο του ΚΛ

16.Δ4

α) Η ευθεία ΔΕ έχει εξίσωση:

$$y-1 = \frac{1-0}{0-\alpha}(x-0) \Rightarrow y-1 = -\frac{1}{\alpha}x \Rightarrow \alpha y - \alpha = -x \Rightarrow \alpha y + x - \alpha = 0$$

β) Η ΔΕ έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{1}{\alpha}$

Άρα η κάθετη στην ΔΕ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{-1}{-\frac{1}{\alpha}} = \alpha$, και αφού

διέρχεται από το Α, θα έχει εξίσωση: $y-0 = \alpha(x-0) \Rightarrow y = \alpha x$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών:

$$\begin{cases} \alpha y + x - \alpha = 0 \\ y = \alpha x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 x + x - \alpha = 0 \\ y = \alpha x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha^2 + 1)x = \alpha \\ y = \alpha x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \\ y = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \end{cases}$$

Άρα το σημείο Η έχει συντεταγμένες $H\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+1}, \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}\right)$

$$\gamma) \text{ Είναι : } \overrightarrow{ZH} = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2+1} - 0, \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} - \alpha\right) \text{ και } \overrightarrow{\Gamma H} = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2+1} - 1, \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} - 1\right)$$

$$\text{Άρα έχουμε : } \overrightarrow{ZH} \cdot \overrightarrow{\Gamma H} = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2+1} - 0, \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} - \alpha\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha^2+1} - 1, \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{ZH} \cdot \overrightarrow{\Gamma H} = \frac{\alpha^2}{(\alpha^2+1)^2} - \frac{\alpha}{\alpha^2+1} + \frac{\alpha^4}{(\alpha^2+1)^2} - \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} - \frac{\alpha^3}{(\alpha^2+1)^2} + \alpha = \dots = 0$$

Άρα : $\overrightarrow{ZH} \perp \overrightarrow{\Gamma H}$

16.Δ5

$$\alpha) \text{ Είναι } \Gamma(\alpha, 0) \text{ Άρα η ΑΓ έχει εξίσωση : } y - 0 = \frac{2-0}{3-\alpha}(x - \alpha) \Rightarrow (3-\alpha)y = 2x - 2\alpha$$

Το σημείο Β είναι το σημείο τομής των ΟΒ και ΑΓ

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} y = x \\ (3-\alpha)y = 2x - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ 3x - \alpha x = 2x - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x - \alpha x = -2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x(1-\alpha) = -2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \frac{2\alpha}{\alpha-1} \end{cases}$$

Άρα το σημείο Β έχει συντεταγμένες $B\left(\frac{2\alpha}{\alpha-1}, \frac{2\alpha}{\alpha-1}\right)$

$$\beta) \text{ Είναι : } \overrightarrow{OB} = \left(\frac{2\alpha}{\alpha-1}, \frac{2\alpha}{\alpha-1}\right) \text{ και } \overrightarrow{OA} = (3, 2)$$

$$\text{Άρα : } (OAB) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OA} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \frac{2\alpha}{\alpha-1} & \frac{2\alpha}{\alpha-1} \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{4\alpha}{\alpha-1} - \frac{6\alpha}{\alpha-1} \right| = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$\gamma) \text{ Είναι : } \overrightarrow{O\Gamma} = (\alpha, 0)$$

$$\text{Άρα : } (OAG) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{OA} & \overrightarrow{O\Gamma} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-2\alpha| = \alpha$$

$$\text{Άρα : } \frac{1}{(OAB)} + \frac{1}{(OAG)} = \frac{1}{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

16.Δ6

$\alpha)$ Το Λ είναι μέσο του ΔΓ, άρα έχει συντεταγμένες :

$$\Lambda\left(\frac{0+\alpha}{2}, \frac{0+0}{2}\right) \Rightarrow \Lambda\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$$

Το Μ είναι μέσο του ΒΓ, άρα έχει συντεταγμένες :

$$M\left(\frac{\alpha+\alpha}{2}, \frac{\beta+0}{2}\right) \Rightarrow M\left(\alpha, \frac{\beta}{2}\right)$$

$$\text{Άρα η ΒΛ έχει εξίσωση : } y-0 = \frac{0-\beta}{\frac{\alpha}{2}-\alpha} \left(x-\frac{\alpha}{2} \right) \Rightarrow y = \frac{2\beta}{\alpha} \left(x-\frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\text{Και η ΑΜ έχει εξίσωση : } y-\frac{\beta}{2} = \frac{\frac{\beta}{2}-\beta}{\alpha-0} (x-\alpha) \Rightarrow y-\frac{\beta}{2} = -\frac{\beta}{2\alpha} (x-\alpha)$$

Το Κ είναι το σημείο τομής των ΒΛ , ΑΜ , άρα θα βρεθεί από το σύστημα

$$\text{των εξισώσεων τους : } \begin{cases} y = \frac{2\beta}{\alpha} \left(x-\frac{\alpha}{2} \right) \\ y-\frac{\beta}{2} = -\frac{\beta}{2\alpha} (x-\alpha) \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4\alpha}{5} \\ y = \frac{3\beta}{5} \end{cases}$$

$$\text{Άρα είναι } K \left(\frac{4\alpha}{5}, \frac{3\beta}{5} \right)$$

$$\beta) \text{ Είναι } \overrightarrow{KA} = \left(-\frac{4\alpha}{5}, -\frac{3\beta}{5} + \beta \right) = \left(-\frac{4\alpha}{5}, \frac{2\beta}{5} \right)$$

$$\text{και } \overrightarrow{KB} = \left(\alpha - \frac{4\alpha}{5}, \beta - \frac{3\beta}{5} \right) = \left(\frac{\alpha}{5}, \frac{2\beta}{5} \right)$$

$$\text{Έχουμε : } \hat{AKB} = 90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{KA} \perp \overrightarrow{KB} \Rightarrow \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB} = 0 \Rightarrow -\frac{4\alpha}{5} \cdot \frac{\alpha}{5} + \frac{2\beta}{5} \cdot \frac{2\beta}{5} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4\alpha^2 + 4\beta^2 = 0 \Rightarrow (\beta - \alpha)(\beta + \alpha) = 0 \Rightarrow \beta = \alpha \text{ ή } \beta = -\alpha \Rightarrow$$

$$\text{Για } \beta = \alpha \text{ το Κ έχει συντεταγμένες } K \left(\frac{4\alpha}{5}, \frac{3\alpha}{5} \right) \text{ και } \begin{cases} x = \frac{4\alpha}{5} \\ y = \frac{3\alpha}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5x}{4} \\ y = \frac{3 \cdot \frac{5x}{4}}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x \end{cases}$$

$$\text{Για } \beta = -\alpha \text{ το Κ έχει συντεταγμένες } K \left(\frac{4\alpha}{5}, -\frac{3\alpha}{5} \right) \text{ και } \begin{cases} x = \frac{4\alpha}{5} \\ y = -\frac{3\alpha}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5x}{4} \\ y = -\frac{3 \cdot \frac{5x}{4}}{5} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x \end{cases}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Κ είναι οι ευθείες :

$$y = \frac{3}{4}x \text{ και } y = -\frac{3}{4}x$$

16.Δ7

α) Το Μ είναι το μέσο της ΒΓ , άρα έχει συντεταγμένες :

$$M \left(\frac{0+\gamma}{2}, \frac{0+0}{2} \right) \Rightarrow M \left(\frac{\gamma}{2}, 0 \right)$$

Το Κ είναι το μέσο της ΑΜ , άρα έχει συντεταγμένες :

$$K \left(\frac{\alpha + \frac{\gamma}{2}}{2}, \frac{\beta + 0}{2} \right) \Rightarrow K \left(\frac{2\alpha + \gamma}{4}, \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\text{Η ΑΓ έχει εξίσωση : } y-0 = \frac{0-\beta}{\gamma-\alpha} (x-\gamma) \Rightarrow (\gamma-\alpha)y + \beta x - \beta\gamma = 0$$

$$\text{Η ΒΚ έχει εξίσωση : } y - 0 = \frac{\frac{\beta}{2}}{\frac{2\alpha + \gamma}{4}}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{2\beta}{2\alpha + \gamma}x$$

Το Λ είναι το σημείο τομής των ΒΚ, ΑΓ, άρα λύνουμε το σύστημα

$$\text{των εξισώσεων τους : } \begin{cases} (\gamma - \alpha)y + \beta x - \beta\gamma = 0 \\ y = \frac{2\beta}{2\alpha + \gamma}x \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\alpha + \gamma}{3} \\ y = \frac{2\beta}{3} \end{cases}$$

$$\text{Άρα είναι : } \Lambda \left(\frac{2\alpha + \gamma}{3}, \frac{2\beta}{3} \right)$$

$$\beta) \text{ Είναι : } \overrightarrow{\Lambda\Gamma} = (\gamma - \alpha, -\beta)$$

$$\text{Άρα : } (\Lambda\Gamma) = \sqrt{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2}$$

$$\text{Και } \overrightarrow{\Lambda\Lambda} = \left(\frac{2\alpha + \gamma}{3} - \alpha, \frac{2\beta}{3} - \beta \right) = \left(\frac{\gamma - \alpha}{3}, -\frac{\beta}{3} \right)$$

$$\text{Άρα } (\Lambda\Lambda) = \sqrt{\left(\frac{\gamma - \alpha}{3} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{3} \right)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(\gamma - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{3}(\Lambda\Gamma)$$

$$\text{Οπότε : } (\Lambda\Gamma) = 3(\Lambda\Lambda)$$

16.Δ8

$$\alpha) \text{ Είναι } \overrightarrow{B\Gamma} = (\alpha - \alpha, \alpha - 0) = (0, \alpha)$$

$$\text{Άρα : } \overrightarrow{BZ} = \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{4} \Rightarrow \overrightarrow{BZ} = \left(0, \frac{\alpha}{4} \right) \text{ και το } Z \text{ έχει συντεταγμένες } Z \left(\alpha, \frac{\alpha}{4} \right)$$

$$\text{Άρα είναι : } \overrightarrow{\Delta Z} = \left(\alpha - 0, \frac{\alpha}{4} - \alpha \right) = \left(\alpha, -\frac{3\alpha}{4} \right)$$

$$\text{Όμοια, το } H \text{ έχει συντεταγμένες } H \left(\frac{\alpha}{4}, 0 \right)$$

$$\text{Άρα : } \overrightarrow{\Gamma H} = \left(\frac{\alpha}{4} - \alpha, 0 - \alpha \right) = \left(-\frac{3\alpha}{4}, -\alpha \right)$$

$$\text{Οπότε : } \overrightarrow{\Delta Z} \cdot \overrightarrow{\Gamma H} = \alpha \cdot \left(-\frac{3\alpha}{4} \right) - \frac{3\alpha}{4}(-\alpha) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\Delta Z} \perp \overrightarrow{\Gamma H}$$

$$\beta) \text{ Η } \Delta Z \text{ έχει εξίσωση : } y - \alpha = \frac{\frac{\alpha}{4} - \alpha}{\alpha - 0}(x - 0) \Rightarrow y - \alpha = \frac{1}{4}x$$

$$\text{Η } \Gamma H \text{ έχει εξίσωση : } y - 0 = \frac{0 - \alpha}{\frac{\alpha}{4} - \alpha} \left(x - \frac{\alpha}{4} \right) \Rightarrow y = \frac{4}{3} \left(x - \frac{\alpha}{4} \right)$$

Το Κ είναι το σημείο τομής των ΔΖ, ΓΗ, άρα λύνουμε το σύστημα

$$\text{των εξισώσεων τους : } \begin{cases} y - \alpha = \frac{1}{4}x \\ y = \frac{4}{3} \left(x - \frac{\alpha}{4} \right) \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{16\alpha}{25} \\ y = \frac{13\alpha}{25} \end{cases}$$

$$\text{Άρα το } K \text{ έχει συντεταγμένες } K \left(\frac{16\alpha}{25}, \frac{13\alpha}{25} \right)$$

β) Χωρίζουμε το τετράπλευρο ΑΗΚΔ σε δύο τρίγωνα , τα $\triangle A\hat{\Delta}H$, $\triangle H\hat{\Delta}K$

Τότε : $(\triangle A\hat{H}K\Delta) = (\triangle A\hat{\Delta}H) + (\triangle H\hat{\Delta}K) =$

$$= \frac{1}{2} \left| \det \left(\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{\Delta H} \right) \right| + \frac{1}{2} \left| \det \left(\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{\Delta K} \right) \right| = \dots = \frac{77\alpha^2}{200}$$

16.Δ9

α) Η ΒΓ έχει εξίσωση : $y - 0 = \frac{0 - \beta}{\alpha - 0} (x - \alpha) \Rightarrow y = -\frac{\beta}{\alpha} (x - \alpha)$

Η ΑΚ είναι κάθετη στην ΒΓ , άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\alpha}{\beta}$, και αφού

Διέρχεται από το $A(0,0)$, θα έχει εξίσωση : $y - 0 = \frac{\alpha}{\beta} (x - 0) \Rightarrow y = \frac{\alpha}{\beta} x$

Το Κ είναι το σημείο τομής των ΑΚ , ΒΓ , άρα λύνουμε το σύστημα

$$\text{των εξισώσεων τους : } \begin{cases} y = -\frac{\beta}{\alpha} (x - \alpha) \\ y = \frac{\alpha}{\beta} x \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \\ y = \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}$$

Άρα το Κ έχει συντεταγμένες $K \left(\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$

β) Η ΑΒ έχει εξίσωση : $y - 0 = \frac{0 - 0}{0 - \alpha} (x - 0) \Rightarrow y = 0$

Είναι $KZ \perp AB$ και διέρχεται από το $K \left(\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$

Άρα η ΚΖ έχει εξίσωση : $x = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$

Επομένως το Ζ , ως σημείο τομής των ΑΒ , ΚΖ , έχει συντεταγμένες $Z \left(\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, 0 \right)$

Όμοια , το σημείο Θ έχει συντεταγμένες $\Theta \left(0, \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$

Άρα έχουμε : $\overrightarrow{AK} = \left(\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$

Και $\overrightarrow{Z\Theta} = \left(0 - \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} - 0 \right) = \left(\frac{-\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$

Προφανώς είναι : $|\overrightarrow{AK}| = |\overrightarrow{Z\Theta}|$

γ) Το Λ είναι το μέσο της ΒΓ , άρα έχει συντεταγμένες :

$$\Lambda \left(\frac{0 + \alpha}{2}, \frac{\beta + 0}{2} \right) \Rightarrow \Lambda \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \right)$$

Οπότε : $\overrightarrow{A\Lambda} = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \right)$ και

$$\overrightarrow{Z\Theta} \cdot \overrightarrow{A\Lambda} = \left(\frac{-\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \right) =$$

$$= -\left(\frac{\alpha^2\beta^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right) + \left(\frac{\alpha^2\beta^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}\right) = 0 \quad \text{άρα } \overrightarrow{Z\Theta} \perp \overrightarrow{A\Lambda}$$

16.Δ10

α) Η ΔΒ έχει εξίσωση : $y-0 = \frac{\beta-0}{0-\alpha}(x-\alpha) \Rightarrow y = -\frac{\beta}{\alpha}(x-\alpha)$

Είναι $AE \perp \Delta B$, άρα η ΑΕ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\alpha}{\beta}$, και αφού διέρχεται

από το $A(0,0)$, θα έχει εξίσωση : $y-0 = \frac{\alpha}{\beta}(x-0) \Rightarrow y = \frac{\alpha}{\beta}x$

Το Ε είναι το σημείο τομής των ΔΒ , ΑΕ , άρα λύνουμε το σύστημα

$$\text{των εξισώσεων τους : } \begin{cases} y = -\frac{\beta}{\alpha}(x-\alpha) \\ y = \frac{\alpha}{\beta}x \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \\ y = \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2+\beta^2} \end{cases}$$

Άρα το Ε έχει συντεταγμένες $E\left(\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}, \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)$

Επίσης , το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο , άρα : $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$

Επομένως το Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(\alpha, \beta)$

Είναι : $\Gamma Z \perp \Delta B$, άρα η ΓΖ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\alpha}{\beta}$ και αφού διέρχεται

Από το Γ , θα έχει εξίσωση : $y-\beta = \frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha)$

Το Ζ είναι το σημείο τομής των ΓΖ , ΔΒ , άρα λύνουμε το σύστημα

$$\text{των εξισώσεων τους : } \begin{cases} y = -\frac{\beta}{\alpha}(x-\alpha) \\ y-\beta = \frac{\alpha}{\beta}(x-\alpha) \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha^3}{\alpha^2+\beta^2} \\ y = \frac{\beta^3}{\alpha^2+\beta^2} \end{cases}$$

Άρα το Ζ έχει συντεταγμένες $Z\left(\frac{\alpha^3}{\alpha^2+\beta^2}, \frac{\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}\right)$

β) Είναι : $\overrightarrow{\Gamma E} = \left(\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} - \alpha, \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2+\beta^2} - \beta\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma E} = \left(\frac{\alpha\beta^2 - \alpha^3 - \alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\alpha^2\beta - \alpha^2\beta - \beta^3}{\alpha^2 + \beta^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma E} = \left(\frac{-\alpha^3}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{-\beta^3}{\alpha^2 + \beta^2}\right) \quad \text{και} \quad \overrightarrow{AZ} = \left(\frac{\alpha^3}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\beta^3}{\alpha^2 + \beta^2}\right)$$

Άρα $\overrightarrow{\Gamma E} = -\overrightarrow{AZ} \Rightarrow \overrightarrow{\Gamma E} // \overrightarrow{AZ}$

γ) Το Θ είναι το μέσο του ΑΒ , άρα έχει συντεταγμένες :

$$\Theta\left(\frac{0+\alpha}{2}, \frac{0+0}{2}\right) \Rightarrow \Theta\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$$

$$\text{Άρα} : \overrightarrow{E\Theta} = \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{-\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{E\Theta} = \left(\frac{\alpha^3 - \alpha\beta^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)}, \frac{-\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$$

$$\text{Το } H \text{ είναι το μέσο του } B\Gamma, \text{ άρα έχει συντεταγμένες} : H\left(\frac{\alpha + \alpha}{2}, \frac{\beta + 0}{2}\right) \Rightarrow H\left(\alpha, \frac{\beta}{2}\right)$$

$$\text{Άρα} : \overrightarrow{HZ} = \left(\frac{\alpha^3}{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha, \frac{\beta^3}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\beta}{2} \right) \Rightarrow \overrightarrow{HZ} = \left(\frac{-\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\beta^3 - \alpha^2\beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \right)$$

$$\text{Άρα} : \overrightarrow{E\Theta} \cdot \overrightarrow{HZ} = \frac{\alpha^3 - \alpha\beta^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \cdot \left(\frac{-\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \right) - \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\beta^3 - \alpha^2\beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{E\Theta} \cdot \overrightarrow{HZ} = \frac{-\alpha^4\beta^2 + \alpha^2\beta^4}{2(\alpha^2 + \beta^2)^2} - \frac{\alpha^2\beta^4 - \alpha^4\beta^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)^2} \Rightarrow \overrightarrow{E\Theta} \cdot \overrightarrow{HZ} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{E\Theta} \perp \overrightarrow{HZ}$$

16.Δ11

α) Έστω : $\Delta(x, 0)$

$$\text{Είναι} : \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{B}\hat{E} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{B\Delta}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{B\Delta}|} = \frac{\overrightarrow{B\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}}{|\overrightarrow{B\Delta}| \cdot |\overrightarrow{B\Gamma}|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(0, -\beta) \cdot (x, -\beta)}{\sqrt{\beta^2}} = \frac{(x, -\beta) \cdot (\alpha, -\beta)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^2}{\beta} = \frac{\alpha x + \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \Rightarrow \alpha x + \beta^2 = \beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \beta^2}{\alpha}$$

$$\text{Άρα η } \Delta \text{ έχει συντεταγμένες } \Delta\left(\frac{\beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \beta^2}{\alpha}, 0\right)$$

$$\text{β)} \text{ Η } B\Gamma \text{ έχει συντεταγμένες } y - 0 = \frac{0 - \beta}{\alpha - 0}(x - \alpha) \Rightarrow y = -\frac{\beta}{\alpha}(x - \alpha)$$

Είναι : $\Delta E \perp B\Gamma$, άρα η ΔE έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{\alpha}{\beta}$, και αφού διέρχεται

$$\text{Από το } \Delta, \text{ θα έχει εξίσωση} : y - 0 = \frac{\alpha}{\beta} \left(x - \frac{\beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \beta^2}{\alpha} \right)$$

Το Z είναι το σημείο τομής των ευθειών $x = 0$ και $E\Delta$

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\alpha}{\beta} \left(x - \frac{\beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \beta^2}{\alpha} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \beta - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}$$

$$\text{Άρα το } Z \text{ έχει συντεταγμένες} : Z(0, \beta - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$$

γ) Το Ε είναι το σημείο τομής των ΔΕ , ΒΓ

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} y = -\frac{\beta}{\alpha}(x - \alpha) \\ y = \frac{\alpha}{\beta}\left(x - \frac{\beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \beta^2}{\alpha}\right) \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ y = \beta - \frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{cases}$$

Άρα το Ε έχει συντεταγμένες : $E\left(\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \beta - \frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)$

δ) Είναι : $\overrightarrow{BZ} = (0 - 0, \beta - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \beta) = (0, -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$

και $\overrightarrow{B\Gamma} = (\alpha - 0, 0 - \beta) = (\alpha, -\beta)$

Άρα $|\overrightarrow{BZ}| = \sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

Συνεπώς : $|\overrightarrow{BZ}| = |\overrightarrow{B\Gamma}|$

ε) Είναι : $\overrightarrow{BA} = (0 - 0, 0 - \beta) = (0, -\beta)$

και $\overrightarrow{BE} = \left(\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - 0, \beta - \frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \beta\right) = \left(\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)$

Άρα : $|\overrightarrow{BA}| = \beta$ και $|\overrightarrow{BE}| = \sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\beta^4}{\alpha^2 + \beta^2}} = \sqrt{\beta^2\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}\right)} = \beta$

Συνεπώς : $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BE}|$