

16.Γ1

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες της κορυφής Α , λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των ΑΒ , ΑΓ :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 7 = 0 \\ x + 5y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(3, -1)$$

Βρίσκουμε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ , λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των ΑΓ , ΒΓ :

$$\begin{cases} x + 5y + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(-2, 0)$$

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου είναι : $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) \right| = \dots = \frac{13}{2}$

16.Γ2

Η απόσταση των δύο παράλληλων ευθειών ισούται με την απόσταση ενός τυχαίου σημείου της μίας ευθείας από την άλλη

Έστω Α(1,0) σημείο της ευθείας $3x + 4y - 3 = 0$ (ε_1)

$$\text{Τότε : } d(A, \varepsilon_2) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

Η απόσταση αυτή των δύο παράλληλων πλευρών , είναι στην ουσία η πλευρά α του τετραγώνου. Άρα το τετράγωνο έχει εμβαδόν $E = \alpha^2 = 2^2 = 4$

16.Γ3

Έστω : $\Gamma(x_0, y_0)$ το ζητούμενο σημείο. Επειδή $\Gamma \in \varepsilon : y = x + 2$, θα είναι :

$$y_0 = x_0 + 2 . \text{ Άρα είναι : } \Gamma(x_0, x_0 + 2) , \text{ θα είναι : } A\Gamma = B\Gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_0 - 1)^2 + (y_0 - 1)^2} = \sqrt{(x_0 - 5)^2 + (y_0 - 3)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_0 - 1)^2 + (x_0 + 2 - 1)^2 = (x_0 - 5)^2 + (x_0 + 2 - 3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 + x_0^2 + 2x_0 + 1 = x_0^2 - 10x_0 + 25 + x_0^2 - 2x_0 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x_0 = 24 \Rightarrow x_0 = 2$$

Άρα : $y_0 = x_0 + 2 = 4$ και το ζητούμενο σημείο είναι το $\Gamma(2, 4)$

16.Γ4

Έστω : $\Gamma(x_0, y_0)$ το ζητούμενο σημείο.

Επειδή : $\Gamma \in \varepsilon : y = 3x - 1$, θα είναι : $y_0 = 3x_0 - 1$

Άρα είναι : $y_0 = 3x_0 - 1$. Άρα είναι : $\Gamma(x_0, 3x_0 - 1)$

Έχουμε τώρα : $d(\Gamma, \varepsilon_1) = d(\Gamma, \varepsilon_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|1 \cdot x_0 + 1(3x_0 - 1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|1 \cdot x_0 - 1 \cdot (3x_0 - 1) + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |4x_0 - 2| = |4 - 2x_0| \Rightarrow 4x_0 - 2 = 4 - 2x_0 \text{ ή } 4x_0 - 2 = 2x_0 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x_0 = 6 \quad \text{ή} \quad 2x_0 = -2 \Rightarrow x_0 = 1 \quad \text{ή} \quad x_0 = -1$$

Άρα υπάρχουν δύο σημεία της ε που ισαπέχουν από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τα $(1, 2)$ και $(-1, -4)$

16.Γ5

Έστω : $M(x_0, y_0)$ Επειδή $M \in \varepsilon : y = x + 2$, θα είναι : $y_0 = x_0 + 2$

Άρα είναι : $M(x_0, x_0 + 2)$

Είναι : $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (1 - x_0, 1 - (x_0 + 2)) \cdot (5 - x_0, 3 - (x_0 + 2)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - x_0, -1 - x_0) \cdot (5 - x_0, 1 - x_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - x_0)(5 - x_0) - (1 + x_0)(1 - x_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow x_0 = 1 \quad \text{ή} \quad x_0 = 2$$

Για $x_0 = 1$ είναι $y_0 = 1 + 2 = 3$

Για $x_0 = 2$ είναι $y_0 = 2 + 2 = 4$

Άρα υπάρχουν δύο ζητούμενα σημεία, τα $(2, 4)$ και $(1, 3)$

16.Γ6

Έστω : $\varepsilon_3 : y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ η εξίσωση της ε

Αφού διέρχεται από το $A(1, -1)$ θα είναι :

$$\varepsilon_3 : y - (-1) = \lambda(x - 1) \Rightarrow y = \lambda x - \lambda - 1$$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής, B και Γ , με τις ε_1 και ε_2 αντίστοιχα :

$$\begin{cases} y = -x + 9 \\ y = \lambda x - \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda x - \lambda - 1 = -x + 9 \\ y = -x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(\lambda + 1) = \lambda + 10 \\ y = -x + 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10 + \lambda}{\lambda + 1} \\ y = \frac{8\lambda - 1}{\lambda + 1} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{10 + \lambda}{\lambda + 1}, \frac{8\lambda - 1}{\lambda + 1}\right)$$

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ y = \lambda x - \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2(\lambda x - \lambda - 1) - 4 = 0 \\ y = \lambda x - \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2\lambda x - 2\lambda - 2 - 4 = 0 \\ y = \lambda x - \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(2\lambda + 1) = 6 + 2\lambda \\ y = \lambda x - \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6 + 2\lambda}{1 + 2\lambda} \\ y = \frac{6\lambda + 2\lambda^2}{1 + 2\lambda} - \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{6 + 2\lambda}{1 + 2\lambda}, \frac{6\lambda + 2\lambda^2}{1 + 2\lambda} - \lambda - 1\right)$$

Είναι : $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{A\Gamma} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{10 + \lambda}{\lambda + 1} - 1, \frac{8\lambda - 1}{\lambda + 1} + 1\right) = 3\left(\frac{6 + 2\lambda}{1 + 2\lambda} - 1, \frac{6\lambda + 2\lambda^2}{1 + 2\lambda} - \lambda - 1 + 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{10 + \lambda}{\lambda + 1} - 1 = 3\left(\frac{6 + 2\lambda}{1 + 2\lambda} - 1\right) \\ \frac{8\lambda - 1}{\lambda + 1} + 1 = 3\left(\frac{6\lambda + 2\lambda^2}{1 + 2\lambda} - \lambda\right) \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda = 2$$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $\varepsilon_3 : y = 2x - 2 - 1 \Rightarrow y = 2x - 3$

16.Γ7

Έστω ότι η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $B(\beta, 0)$ και $\Gamma(0, \gamma)$

Τότε το τμήμα της που αποκόπτεται από τους άξονες είναι το $B\Gamma$, και αφού έχει μέσο το $A(-2, 1)$, θα ισχύει :

$$\left(\frac{\beta+0}{2}, \frac{\gamma+0}{2} \right) = (-2, 1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\beta}{2} = -2 \\ \frac{\gamma}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -4 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Άρα η ε διέρχεται από τα $B(-4, 0)$, $\Gamma(0, 2)$ (και $A(1, -1)$)

$$\text{Επομένως η εξίσωση : } y - 0 = \frac{2-0}{0-(-4)}(x - (-4)) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x + 4) \Rightarrow x - 2y + 4 = 0$$

16.Γ8

Έστω : $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας.

Καταρχήν είναι $\lambda \neq 0$ διότι τότε η ευθεία είναι οριζόντια γιατί δεν ορίζει τμήματα και στους δύο άξονες

Αφού η ε διέρχεται

$$\text{Από το } A(2, 3) \text{ θα είναι : } \varepsilon : y - 3 = \lambda(x - 2) \Rightarrow y = \lambda x - 2\lambda + 3$$

$$\text{Για } x = 0 : y = 3 - 2\lambda$$

$$\text{Για } y = 0 : 0 = \lambda x - 2\lambda + 3 \Rightarrow x = \frac{2\lambda - 3}{\lambda}$$

$$\text{Άρα η } \varepsilon \text{ τέμνει τους άξονες στα } B(0, 3 - 2\lambda) \text{ και } \Gamma\left(\frac{2\lambda - 3}{\lambda}, 0\right)$$

Και αφού ορίζει στους άξονες τμήματα ισομήκη, θα είναι :

$$OB = OG \Rightarrow |3 - 2\lambda| = \left| \frac{2\lambda - 3}{\lambda} \right| \Rightarrow |3\lambda - 2\lambda^2| = |2\lambda - 3|$$

$$\Rightarrow 3\lambda - 2\lambda^2 = 2\lambda - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 0 \text{ (απορρίπτεται)}$$

ή

$$3\lambda - 2\lambda^2 = 3 - 2\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 0 \text{ (απορρίπτεται)}$$

$$\text{Για } \lambda = 1 : y = x - 2 + 3 \Rightarrow y = x + 1$$

και

$$\text{για } \lambda = -1 : y = -x + 2 + 3 \Rightarrow y = -x + 5$$

16.Γ9

Μια ευθεία που διέρχεται από το $A(-1, 0)$ μπορεί να :

- Μην έχει συντελεστή διεύθυνσης, άρα να είναι η $x = -1$

Βρίσκουμε που τέμνει τις ε_1 και ε_2 :

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow B(-1, -2) \text{ και } \begin{cases} x = -1 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(-1, 1)$$

$$\text{Τα σημεία αυτά έχουν απόσταση : } |\overline{B\Gamma}| = \sqrt{(-1 - (-1))^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{3^2} = 3$$

Άρα μία ζητούμενη ευθεία είναι η $x = -1$

- Να έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , άρα να είναι της μορφής :

$$y - 0 = \lambda(x - (-1)) \Rightarrow y = \lambda x + \lambda$$

Βρίσκουμε που τέμνει τις ε_1 και ε_2 :

$$\begin{cases} y = \lambda x + \lambda \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \lambda x + \lambda \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda+1}{\lambda-1} \\ y = -\frac{\lambda+1}{\lambda-1} \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda-1}, -\frac{\lambda+1}{\lambda-1} - 1\right)$$

και

$$\begin{cases} y = \lambda x + \lambda \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = \lambda x + \lambda \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2-\lambda}{\lambda-1} \\ y = \frac{2-\lambda}{\lambda-1} + 2 \end{cases} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{2-\lambda}{\lambda-1}, \frac{2-\lambda}{\lambda-1} + 2\right)$$

Τα σημεία αυτά έχουν απόσταση 3, άρα λύνουμε την εξίσωση:

$$|\overline{B\Gamma}| = 3 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{2-\lambda}{\lambda-1} + \frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^2 + \left(\frac{2-\lambda}{\lambda-1} + 2 + \frac{\lambda+1}{\lambda-1} + 1\right)^2} = 3$$

Και βρίσκουμε $\lambda = 0$

Άρα η δεύτερη ζητούμενη ευθεία είναι η $y = 0$

16.Γ10

Έστω : $\Gamma(x_0, y_0)$ η ζητούμενη κορυφή . Αφού ανήκει στην ευθεία :

$$\varepsilon : 3x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - 3x, \text{ θα είναι } y_0 = 1 - 3x_0$$

Άρα είναι : $\Gamma(x_0, 1 - 3x_0)$

Επομένως έχουμε : $\overline{AB} = (-1 - 2, 4 - 3) = (-3, 1)$ και

$$\overline{A\Gamma} = (x_0 - 2, 1 - 3x_0 - 3) = (x_0 - 2, -2 - 3x_0)$$

Το $\triangle AB\Gamma$ έχει εμβαδόν 8, άρα είναι :

$$\frac{1}{2} |\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma})| = 8 \Rightarrow |\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma})| = 16 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ x_0 - 2 & -2 - 3x_0 \end{vmatrix} = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |6 + 9x_0 - x_0 + 2| = 16 \Rightarrow |8x_0 + 8| = 16 \Rightarrow \begin{cases} 8x_0 + 8 = 16 \\ \text{ή} \\ 8x_0 + 8 = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ \text{ή} \\ x_0 = -3 \end{cases}$$

Άρα έχουμε δύο πιθανές κορυφές, με συντεταγμένες :

$$\Gamma(1, 1 - 3 \cdot 1) \Rightarrow \Gamma(1, -2) \quad \text{ή} \quad \Gamma(-3, 1 - 3 \cdot (-3)) \Rightarrow \Gamma(-3, 10)$$

16.Γ11

Μία ευθεία που διέρχεται από το $M(2, 1)$ μπορεί :

- Να μην έχει συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή να είναι η $\varepsilon : x = 2$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της E με τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:

$$\begin{cases} x = 2 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(2, 3) \quad \text{και} \quad \begin{cases} x = 2 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(2, -1)$$

Πράγματι το μέσο του AB είναι το σημείο $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (2, 1) = M$

Άρα η $x = 2$ είναι μία ζητούμενη ευθεία

- Να έχει συντελεστή διεύθυνσης λ , δηλαδή να είναι της μορφής $\varepsilon : y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

Και αφού διέρχεται από το $M(2, 1)$ είναι : $y - 1 = \lambda(x - 2) \Rightarrow y = \lambda x - 2\lambda + 1$

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της E με τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:

$$\begin{cases} y = \lambda x - 2\lambda + 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2\lambda}{1-\lambda} \\ y = \frac{-2\lambda^2}{1-\lambda} \end{cases} - 2\lambda + 1 \quad \text{και} \quad \begin{cases} y = \lambda x - 2\lambda + 1 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\lambda}{1+\lambda} \\ y = \frac{2\lambda^2}{1+\lambda} \end{cases} - 2\lambda + 1$$

Τώρα το μέσο του AB είναι το :

$$\left(\frac{-\frac{2\lambda}{1-\lambda} + \frac{2\lambda}{1+\lambda}}{2}, \frac{\frac{-2\lambda^2}{1-\lambda} - 2\lambda + 1 + \frac{2\lambda^2}{1+\lambda} - 2\lambda + 1}{2} \right)$$

Το οποίο πρέπει να ταυτίζεται με το $M(2,1)$ άρα πρέπει :

$$\begin{cases} \frac{-\lambda}{1-\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} = 2 \\ \frac{-2\lambda^2}{1-\lambda} + \frac{2\lambda^2}{1+\lambda} - 4\lambda + 2 = 2 \end{cases}$$

Το οποίο σύστημα προκύπτει ότι είναι αδύνατο

Άρα η μοναδική ευθεία με την ζητούμενη ιδιότητα είναι η $x = 2$

16.Γ12

Αφού η ζητούμενη ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων , θα είναι της μορφής :

$$y = \lambda x \Rightarrow y - \lambda x = 0 \quad \text{Έχουμε : } d(\varepsilon, A) = d(\varepsilon, B) \Rightarrow \frac{|1 \cdot 1 - 3 \cdot \lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \frac{|2 - \lambda(-2)|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |1 - 3\lambda| = |2 + 2\lambda| \Rightarrow \begin{cases} 1 - 3\lambda = 2 + 2\lambda \\ \text{ή} \\ 1 - 3\lambda = -2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\lambda = -1 \\ \text{ή} \\ \lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{5} \\ \text{ή} \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Άρα υπάρχουν δύο ευθείες με την ζητούμενη ιδιότητα , οι :

$$y = -\frac{1}{5}x \quad \text{και} \quad y = 3x$$

16.Γ13

Οι μεσοκάθετοι του τριγώνου τέμνονται στο περίκεντρο δηλαδή το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου

$$\text{Είναι : } \lambda_{AB} = \frac{4-2}{5-1} = \frac{1}{2} \quad \text{και το μέσο } M \text{ του } AB \text{ έχει συντεταγμένες :}$$

$$M\left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+2}{2}\right) \Rightarrow M(3,3)$$

Άρα η μεσοκάθετος της AB έχει συντελεστή διεύθυνσης -2 , και αφού διέρχεται

$$\text{Από το } M, \text{ έχει εξίσωση : } y - 3 = -2(x - 3) \Rightarrow y = -2x + 9 \quad (1)$$

$$\text{Είναι : } \lambda_{AG} = \frac{-2-2}{5-1} = -1 \quad \text{και το μέσο } N \text{ του } BG \text{ έχει συντεταγμένες :}$$

$$N\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2-2}{2}\right) \Rightarrow N(3,0)$$

Άρα η μεσοκάθετος της BG έχει συντελεστή διεύθυνσης 1 , και αφού διέρχεται

$$\text{Από το } N(3,0), \text{ έχει εξίσωση : } y - 0 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 3 \quad (2)$$

Το περίκεντρο θα βρεθεί από τη λύση του συστήματος των $(1), (2)$:

$$\begin{cases} y = -2x + 9 \\ y = x - 3 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

16.Γ14

Βρίσκουμε μία κορυφή του τριγώνου , λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των δύο πλευρών

$$\text{του, που δίνονται: } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

Το ύψος που άγεται από την κορυφή Α, διέρχεται από το ορθόκεντρο $O(0,0)$

και είναι κάθετο στην τρίτη πλευρά.

Βρίσκουμε την εξίσωση του ύψους που άγεται από την κορυφή Α :

$$y - 0 = \frac{3 - 0}{\frac{1}{2} - 0}(x - 0) \Rightarrow y = 6x$$

Η τρίτη πλευρά είναι κάθετη στο ύψος αυτό, άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{1}{-6}$

Βρίσκουμε την εξίσωση του ύψους από μία κορυφή της τρίτης πλευράς (π.χ την Β),

προς την ε_2 . Το ύψος αυτό είναι κάθετο στην ε_2 , άρα έχει συντελεστή $-\frac{1}{2}$, και

διέρχεται από το ορθόκεντρο $O(0,0)$

$$\text{Άρα έχει εξίσωση: } y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

Άρα η κορυφή από την οποία άγεται το ύψος αυτό, θα βρεθεί από την λύση του συστήματος

$$\text{του ύψους και της } \varepsilon_1: \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

Άρα η πλευρά ΒΓ, έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{1}{6}$ και διέρχεται από το $B\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

$$\text{Άρα έχει εξίσωση: } y - \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{6}\left(x - \frac{8}{3}\right) \Rightarrow 18y + 24 = -3x + 8 \Rightarrow 18y + 3x + 16 = 0$$

16.Γ15

Οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες, άρα κάθε σημείο της ε_1 απέχει ίση απόσταση από την ε_2

Έστω $K(x_0, y_0)$ τυχαίο σημείο της ε_1 Τότε είναι :

$$Ax_0 + By_0 + \Gamma = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{-Ax_0 - \Gamma}{B}$$

$$\text{Άρα: } d(K, \varepsilon_2) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$\Rightarrow \frac{\left|Ax_0 + \frac{B(-Ax_0 - \Gamma)}{B} + \Delta\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\Delta - \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\text{Άρα: } d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\Delta - \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Παρατήρηση : Αν $B = 0$, τότε είναι $\varepsilon_1: x = -\frac{\Gamma}{A}$ και $\varepsilon_2: x = -\frac{\Delta}{A}$

$$\text{Άρα: } d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left| -\frac{\Gamma}{A} - \left(-\frac{\Delta}{A}\right) \right| = \left| \frac{\Delta - \Gamma}{A} \right|$$

Το $A(x_1, y_1)$ κινείται πάνω στην ευθεία $3x + 5y - 3 = 0$, άρα έχουμε διαδοχικά :

$$3x_1 + 5y_1 - 3 = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}3x_1 + \frac{2}{3} \cdot 5y_1 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x_1 + \frac{10}{3}y_1 - 2 = 0 \Rightarrow 2x_1 + \frac{10}{3}y_1 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x_1 + 1) + \frac{10}{3}y_1 - 3 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}(2x_1 + 1) + \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{3}y_1 + \frac{3}{2} \cdot (-3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}(2x_1 + 1) + 5y_1 - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}(2x_1 + 1) + 5y_1 - 4 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}(2x_1 + 1) + (5y_1 - 4) - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 3(2x_1 + 1) + 2(5y_1 - 4) - 1 = 0$$

Άρα το $M(2x_1 + 1, 5y_1 - 4)$ κινείται πάνω στην ευθεία $3x + 2y - 1 = 0$