

15.8 1)

Καταρχήν πρέπει να ελέγξουμε αν η κορυφή Α είναι σημείο της δοσμένης διαγωνίου ή όχι. Παρατηρούμε ότι το $A(1,1)$ δεν επαληθεύει την εξίσωση $y = -2x + 8$, οπότε είναι η διαγώνιος ΒΔ που έχει εξίσωση $y = -3x + 9$

Για να βρούμε πιο εύκολα τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του τετραγώνου θα βρούμε πρώτα τις συντεταγμένες του κέντρου Κ του τετραγώνου

Είναι $ΑΓ \perp ΒΔ \Rightarrow \lambda_{ΑΓ} \cdot \lambda_{ΒΔ} = -1 \Rightarrow \lambda_{ΑΓ} = \frac{1}{2}$ οπότε η ευθεία

ΑΓ (που διέρχεται από το $A(1,1)$) έχει εξίσωση

$$y - 1 = \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow 2y - 2 = x - 1 \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$$

Το κέντρο Κ είναι το σημείο τομής των ευθειών ΑΓ και ΒΔ οπότε για να βρούμε τις συντεταγμένες του, λύνουμε το σύστημα των ευθειών

$$\begin{cases} ΑΓ : x - 2y + 1 = 0 \\ ΒΔ : y = -2x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Επομένως το Κ έχει συντεταγμένες $K(3,2)$

Έστω ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$. Τότε επειδή το $K(3,2)$ είναι μέσο του ΑΓ θα

$$\text{είναι } \frac{x_\Gamma + 1}{2} = 3 \Rightarrow x_\Gamma = 5 \text{ και } \frac{y_\Gamma + 1}{2} = 2 \Rightarrow y_\Gamma = 3, \text{ επομένως το } \Gamma \text{ έχει συντεταγμένες } \Gamma(5,3)$$

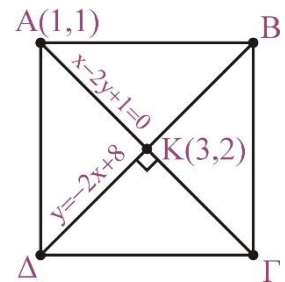
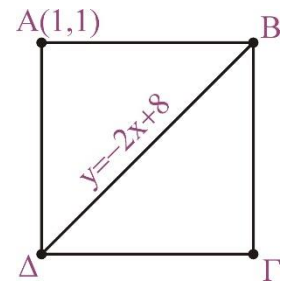
Έστω ότι η κορυφή Β έχει συντεταγμένες $B(\alpha, \beta)$. Τότε

- το Β ανήκει στην ευθεία ΒΔ οπότε ικανοποιεί την εξίσωση της, άρα ισχύει $\beta = -2\alpha + 8$ (1)

- $(KB) = (KA) \Leftrightarrow \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\beta - 2)^2} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - 1)^2}$ (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $(\alpha, \beta) = (2, 4)$ ή $(\alpha, \beta) = (4, 0)$. Προφανώς η μία λύση είναι οι συντεταγμένες του Β και η άλλη οι συντεταγμένες του Δ

Επομένως είναι $B(2,4)$ και $\Delta(4,0)$



15.8 2)

Η κορυφή Α δεν επαληθεύει την εξίσωση της διαγωνίου που δίνεται,

άρα είναι η διαγώνιος ΒΔ που έχει εξίσωση $y = 2x - 5$

Θα βρούμε πρώτα τις συντεταγμένες του κέντρου Κ του τετραγώνου

$$\text{Είναι : } ΑΓ \perp ΒΔ \Rightarrow \lambda_{ΑΓ} = \frac{-1}{\lambda_{ΒΔ}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα η διαγώνιος ΑΓ έχει εξίσωση : } y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y - 8 = -x + 2 \Rightarrow 2y + x - 10 = 0$$

Το κέντρο Κ είναι το σημείο τομής των ΑΓ, ΒΔ

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 2y + x - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow K(4,3)$$

Έστω $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$. Το Κ είναι το μέσο του ΑΓ, άρα θα είναι :

$$\left(\frac{x_{\Gamma}+2}{2}, \frac{y_{\Gamma}+4}{2}\right) = (4,3) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_{\Gamma}+2}{2} = 4 \\ \frac{y_{\Gamma}+4}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{\Gamma} = 6 \\ y_{\Gamma} = 2 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(6,2)$$

Έστω το Β έχει συντεταγμένες Β(α,β). Τότε :

- Το Β ανήκει στην ευθεία ΒΔ , οπότε και ικανοποιεί την εξίσωση της ,

$$\text{άρα ισχύει : } \beta = 2\alpha - 5 \quad (1)$$

$$\bullet \quad (KB) = (KA) \Rightarrow \sqrt{(\alpha-4)^2 + (\beta-3)^2} = \sqrt{(2-4)^2 + (4-3)^2} \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1),(2) βρίσκουμε : (α,β)=(5,5) ή (α,β)=(3,1)

Προφανώς η μία λύση είναι οι συντεταγμένες του Β και η άλλη οι συντεταγμένες του Δ.

15.8 3)

Έστω ότι η $x + y - 1 = 0$ είναι η εξίσωση της ΑΒ

Είναι $AB \parallel \Delta\Gamma$. Έστω λοιπόν $x + y + c_1 = 0$ η εξίσωση της ΔΓ

$$\text{Έχουμε : } d(K, AB) = d(K, \Delta\Gamma) \Rightarrow \frac{|1+2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|1+2+c_1|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Rightarrow |3+c_1| = |2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+c_1 = 2 \\ \text{ή} \\ 3+c_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \text{ (προκύπτει η ΑΒ)} \\ \text{ή} \\ c_1 = -5 \end{cases}$$

Άρα είναι $\Delta\Gamma : x + y - 5 = 0$

Είναι τώρα , $AB \perp B\Gamma$. Άρα έστω : $x - y + c_2 = 0$ η εξίσωση της ΒΓ , και

$x - y + c_3$ η εξίσωση της ΑΔ

$$\text{Είναι επίσης : } d(K, A\Delta) = d(K, AB) \Rightarrow \frac{|1-2+c_3|}{1^2+1^2} = \frac{|1+2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |c_3 - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} c_3 = -1 \\ \text{ή} \\ c_3 = 3 \end{cases}$$

Άρα είναι : $A\Delta : x - y - 1 = 0$ και $B\Gamma : x - y + 3 = 0$

15.8 4)

Με επιχειρήματα όμοια με το ερώτημα 3) , βρίσκουμε τις τρεις άλλες πλευρές του τετραγώνου :

$$\Delta\Gamma : x - 3y = 0 \text{ , } A\Delta : 3x + y - 10 = 0 \text{ , } B\Gamma : 3x + y - 20 = 0$$

Το Α είναι το σημείο τομής των ΑΒ , ΑΔ , άρα λύνουμε το σύστημα

$$\text{των εξισώσεων τους : } \begin{cases} x - 3y + 10 = 0 \\ 3x + y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(2,4)$$

Έστω $\Gamma(x, y)$. Το Κ είναι το μέσο του ΑΓ , άρα έχουμε :

$$\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+4}{2}\right) = (4,3) \Rightarrow (x, y) = (6,2) \text{ άρα είναι } \Gamma(6,2)$$

Το Β είναι το σημείο τομής των ΑΒ , ΒΓ , άρα λύνουμε το σύστημα

$$\text{των εξισώσεων τους: } \begin{cases} x-3y+10=0 \\ 3x+y-20=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow B(5,5)$$

Έστω $\Delta(x,y)$. Το K είναι το μέσο του BD , άρα έχουμε :

$$\left(\frac{x+5}{2}, \frac{y+5}{2}\right) = (4,3) \Rightarrow (x,y) = (3,1) \quad \text{άρα είναι } \Delta(3,1)$$