

15.7 1)

Είναι $AB \perp \Gamma\Delta \Rightarrow \lambda_{AB} \cdot \lambda_{\Gamma\Delta} = -1 \Rightarrow \lambda_{AB} = \frac{1}{2}$ οπότε η ευθεία AB (που διέρχεται από το

$B(-5, -2)$) έχει εξίσωση $y + 2 = \frac{1}{2} \cdot (x + 5) \Leftrightarrow 2y + 4 = x + 5 \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$

Το A είναι το σημείο τομής των ευθειών AB και AM οπότε για να βρούμε τις συντεταγμένες του, λύνουμε το σύστημα των ευθειών $\begin{cases} AB: x - 2y + 1 = 0 \\ AM: x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Επομένως το A έχει συντεταγμένες $B(3, 2)$

Έστω τώρα ότι το Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(\alpha, \beta)$. Τότε

- το Γ ανήκει στην ευθεία ΓΔ οπότε ικανοποιεί την εξίσωση της, άρα ισχύει $2\alpha + \beta + 2 = 0$ (1)

- το μέσο M του ΒΓ έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{\alpha-5}{2}, \frac{\beta-2}{2}\right)$ και είναι σημείο της AM οπότε

ικανοποιεί την εξίσωση της, άρα ισχύει $\frac{\alpha-5}{2} - \frac{\beta-2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha - 5 - \beta + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 5$ (2)

Λύνουμε τώρα το σύστημα των (1) και (2) και βρίσκουμε $\alpha = 1$ και $\beta = -4$ οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $\Gamma(1, -4)$

15.7 2)

Το Γ είναι το σημείο τομής των ΑΓ, ΔΓ, άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(5, 0)$$

Το Α είναι το σημείο τομής των ΑΜ, ΑΓ, άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} 7x + y - 5 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(0, 5)$$

Είναι : $\Gamma\Delta \perp AB \Rightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow \lambda_{AB} = -\frac{1}{\frac{1}{-3}} = 3$

Άρα η AB έχει εξίσωση : $y - 5 = 3(x - 0) \Rightarrow y = 3x + 5$

Έστω τώρα ότι το Β έχει συντεταγμένες $B(\alpha, \beta)$. Τότε :

- Το Β ανήκει στην ευθεία AB, άρα ικανοποιεί την εξίσωσή της, οπότε ισχύει : $\beta = 3\alpha + 5$ (1)

- Το μέσο M του ΒΓ έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{\alpha+5}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ και είναι σημείο της AM, οπότε ικανοποιεί την εξίσωσή της, άρα ισχύει :

$$7\left(\frac{\alpha+5}{2}\right) + \frac{\beta}{2} - 5 = 0 \quad (2)$$

Λύνουμε τώρα το σύστημα των (1), (2) και βρίσκουμε :

$\alpha = -3, \beta = -4$. Άρα είναι $\Gamma(-3, -4)$

15.7 3)

Έστω $A(\alpha, \beta)$. Τότε :

- Το Α ανήκει στην ευθεία ΑΜ, οπότε ικανοποιεί την εξίσωσή της, άρα ισχύει : $2\alpha + \beta - 2 = 0$ (1)

- Το μέσο Δ της ΑΒ έχει συντεταγμένες $\Delta\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}\right)$ και είναι σημείο

της ΔΓ, οπότε ικανοποιεί την εξίσωση της, άρα ισχύει : $\alpha + \beta - 1 = 0$ (2)

Λύνουμε τώρα το σύστημα των (1),(2) και βρίσκουμε : $\alpha = -1, \beta = 2$

Άρα είναι $A(-1,2)$

Έστω τώρα $\Gamma(\alpha, \beta)$. Τότε :

- Το Γ ανήκει στην ευθεία $\Delta\Gamma$, οπότε ικανοποιεί την εξίσωσή της, άρα ισχύει :
 $\alpha + \beta - 1 = 0 \quad (3)$

- Το μέσο M του $B\Gamma$ έχει συντεταγμένες $M\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+2}{2}\right)$ και είναι σημείο

της AM , οπότε ικανοποιεί την εξίσωση της, άρα ισχύει : $2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) + \left(\frac{\beta+2}{2}\right) - 2 = 0 \quad (4)$

Λύνουμε τώρα το σύστημα των (3),(4) και βρίσκουμε : $\alpha = 3, \beta = -4$

Άρα είναι $\Gamma(3, -4)$

15.7 4)

- α) Η κορυφή A δεν ικανοποιεί καμία από τις δοθείσες εξισώσεις. Άρα έστω ότι δίνεται το ύψος BK και η διάμεσος $\Gamma\Lambda$.

Έστω $B(\alpha, \beta)$. Τότε :

- Το B ανήκει στην ευθεία (ύψος) BK , οπότε ικανοποιεί την εξίσωση της, άρα ισχύει :
 $\alpha + 3\beta - 9 = 0 \quad (1)$
- Το μέσο Λ της AB έχει συντεταγμένες $\Lambda\left(\frac{\alpha-2}{2}, \frac{\beta-3}{2}\right)$ και ανήκει στη διάμεσο $\Gamma\Lambda$, άρα ικανοποιεί την εξίσωση της, οπότε ισχύει : $7\left(\frac{\alpha-2}{2}\right) + \left(\frac{\beta-3}{2}\right) - 13 = 0 \quad (2)$

Λύνουμε τώρα το σύστημα των (1),(2) και βρίσκουμε : $\alpha = 6, \beta = 1$

Άρα είναι $B(6,1)$

Είναι : $BK \perp A\Gamma \Rightarrow \lambda_{A\Gamma} = \frac{-1}{\lambda_{BK}} = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3$

Άρα η $A\Gamma$ έχει εξίσωση : $y - (-3) = 3(x - (-2)) \Rightarrow y + 3 = 3x + 6 \Rightarrow y = 3x + 3$

Έστω : $\Gamma(\alpha, \beta)$. Τότε :

- Το Γ ανήκει στην $A\Gamma$, άρα ικανοποιεί την εξίσωση της, οπότε ισχύει :
 $\beta = 3\alpha + 3 \quad (3)$
- Το Γ ανήκει στη διάμεσο $\Gamma\Lambda$, άρα ικανοποιεί την εξίσωση της οπότε ισχύει :
 $7\alpha + \beta - 13 = 0 \quad (4)$

Λύνουμε τώρα το σύστημα των (3),(4) και βρίσκουμε : $\alpha = 1, \beta = 6$

Άρα είναι $\Gamma(1,6)$

- β) Είναι : $\sin \hat{A} = \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AG}|} \Rightarrow \frac{(6+2, 1+3) \cdot (1+2, 6+3)}{\sqrt{8^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 9^2}} = \frac{8 \cdot 3 + 4 \cdot 9}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{90}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Άρα $\hat{A} = 45^\circ$