

15.5 1)

Είναι $\lambda_{\varepsilon} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}$ άρα η ευθεία (ή οι ευθείες) ε_1 που ψάχνουμε, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{3}{2}$, οπότε θα έχει εξίσωση $\varepsilon_1: y = \frac{3}{2}x + \beta$ (χρησιμοποιούμε την μορφή $y = \lambda x + \beta$).

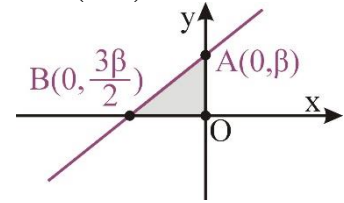
Απομένει να βρεθεί ο αριθμός β . Αρχικά θα βρούμε τα σημεία στα οποία η ε_1 τέμνει τους άξονες.

Για $y = 0$ είναι $0 = \frac{3}{2}x + \beta \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{2\beta}{3}$, άρα η ε_1 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\left(-\frac{2\beta}{3}, 0\right)$

Για $x = 0$ είναι $y = \beta$, άρα η ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, \beta)$

Οπότε η ευθεία ε_1 σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό

$$E = \frac{(OA) \cdot (OB)}{2} = \frac{\left| \beta \right| \cdot \left| -\frac{2\beta}{3} \right|}{2} = \frac{\left| \frac{3\beta^2}{2} \right|}{2} = \frac{3\beta^2}{4}$$



και επειδή το τρίγωνο αυτό έχει εμβαδό 3 θα ισχύει $E = 3 \Rightarrow \frac{3\beta^2}{4} = 3 \Rightarrow 3\beta^2 = 12 \Rightarrow \beta^2 = 4 \Rightarrow \beta = \pm 2$

για $\beta = -2$ έχουμε $\varepsilon_1: y = -\frac{3}{2}x - 2$ και για $\beta = 2$ έχουμε $\varepsilon'_1: y = \frac{3}{2}x + 2$ που είναι οι ζητούμενες ευθείες

15.5 2)

Έστω λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας. Τότε έχει εξίσωση:

$$y - 2 = \lambda(x - 1) \Rightarrow y = \lambda x - \lambda + 2$$

Αρχικά θα βρούμε τα σημεία στα οποία η ε_1 τέμνει τους άξονες:

$$\text{Για } y = 0 \text{ είναι } \lambda x - \lambda + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\lambda - 2}{\lambda}$$

Άρα η ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $A\left(\frac{\lambda - 2}{\lambda}, 0\right)$

Για $x = 0$ είναι $y = 2 - \lambda$

Άρα η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $B(0, 2 - \lambda)$

Η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν:

$$E = \frac{(OA) \cdot (OB)}{2} = \frac{\left| \frac{\lambda - 2}{\lambda} \right| \cdot |2 - \lambda|}{2} = \frac{(2 - \lambda)^2}{2|\lambda|}$$

Και επειδή το τρίγωνο αυτό έχει εμβαδό 4 θα ισχύει:

$$\frac{(2 - \lambda)^2}{2|\lambda|} = 4 \xRightarrow[\lambda < 0]{\text{θετικοί ημιάξονες}} (2 - \lambda)^2 = -8\lambda \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = -8\lambda \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $y = -2x - (-2) + 2 \Rightarrow 2x + y - 4 = 0$

