

15.2 1)

Είναι $AB \perp GH \Rightarrow \lambda_{AB} \cdot \lambda_{GH} = -1 \Rightarrow \lambda_{AB} = 1$ οπότε η ευθεία AB (που διέρχεται από το $A(3,4)$) έχει εξίσωση $y - 4 = 1 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y = x + 1$

Το B είναι το σημείο τομής των ευθειών AB και BΘ οπότε για να βρούμε τις συντεταγμένες του, λύνουμε το σύστημα των ευθειών $\begin{cases} AB: y = x + 1 \\ B\Theta: x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

Επομένως το B έχει συντεταγμένες $B(-1,0)$

Ακόμη είναι $AG \perp B\Theta \Rightarrow \lambda_{AG} \cdot \lambda_{B\Theta} = -1 \Rightarrow \lambda_{AG} = -3$ οπότε η ευθεία AG (που διέρχεται από το $A(3,4)$) έχει εξίσωση $y - 4 = -3 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y - 4 = -3x + 9 \Leftrightarrow y = -3x + 13$

Το Γ είναι το σημείο τομής των ευθειών AG και GH οπότε για να βρούμε τις συντεταγμένες του, λύνουμε το σύστημα των ευθειών $\begin{cases} AG: y = -3x + 13 \\ GH: x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$

Επομένως το Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(5, -2)$

15.2 2)

Το Γ είναι το σημείο τομής των ΔΓ και ΒΓ.

Αρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(4, -1)$$

Το μέσο του ΒΓ, έστω Κ, είναι το σημείο τομής των ευθειών ΑΚ και ΒΓ

Αρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} 7x + y + 3 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -7x - 3 \\ x + 14x + 6 - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -7x - 3 \\ 15x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 0 \end{cases}$$

Αρα αν είναι $B(x, y)$, έχουμε : $(0, -3) = \left(\frac{x+4}{2}, \frac{y-1}{2} \right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+4}{2} = 0 \\ \frac{y-1}{2} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow B(-4, -5)$$

$$\text{Είναι : } AB \perp \Gamma\Delta \Rightarrow \lambda_{AB} = -\frac{1}{\lambda_{\Gamma\Delta}} = \frac{-1}{-\frac{1}{3}} = 3$$

Αρα η AB έχει εξίσωση : $y - (-5) = 3(x - (-4)) \Rightarrow$

$$y + 5 = 3x + 12 \Rightarrow y - 3x - 7 = 0$$

Το Α είναι το σημείο τομής των AB, ΑΚ.

Αρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} y - 3x - 7 = 0 \\ 7x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(-1, 4)$$

15.2 3)

$$\text{Είναι: } B\Gamma \perp A\Delta \Rightarrow \lambda_{B\Gamma} = \frac{-1}{\lambda_{A\Delta}} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Άρα η } B\Gamma \text{ έχει εξίσωση: } y-1 = \frac{1}{4}(x-(-1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y-4 = x+1 \Rightarrow 4y-x-5=0$$

Το Μ είναι σημείο τομής των ΒΓ , ΑΜ

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} y = -3x+11 \\ 4y-x-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3(4y-5)+11 \\ x = 4y-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -12y+15+11 \\ x = 4y-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow M(3,2)$$

$$\text{Το Μ είναι το μέσο του } B\Gamma, \text{ άρα είναι: } (3,2) = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} = 3 \\ \frac{y+1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=6 \\ y+1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(7,3)$$

15.2 4)

Έστω κ(χ, γ) το μέσο του ΒΓ . Το Κ είναι σημείο τομής των ΑΚ , ΒΓ

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} x-3y+4=0 \\ 2x-y-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y-4 \\ 6y-8-y-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y-4 \\ 5y=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow K(5,3)$$

Το Γ είναι σημείο τομής των ΒΓ , ΑΓ

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} 3x-4y+7=0 \\ 2x-y-7=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(7,7)$$

$$\text{Άρα αν είναι } B(x,y), \text{ έχουμε: } \left(\frac{x+7}{2}, \frac{y+7}{2} \right) = (5,3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+7}{2} = 5 \\ \frac{y+7}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+7=10 \\ y+7=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow B(3,-1)$$

Το Α είναι σημείο τομής των ΑΚ , ΑΓ

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} 3x-4y+7=0 \\ x-3y+4=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A(-1,1)$$

15.2 5)

Το Α είναι σημείο τομής των ΔΑ , ΑΒ

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} 3x+2y-1=0 \\ x+6y-11=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A(-1,2)$$

Το Κ είναι το μέσο του ΑΓ . Άρα αν είναι Γ(χ, γ) έχουμε :

$$(1,3) = \left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+2}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} = 1 \\ \frac{y+2}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(3,4)$$

$$B\Gamma // A\Delta, \text{ άρα } \lambda_{B\Gamma} = \lambda_{A\Delta} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Άρα η } B\Gamma \text{ έχει εξίσωση: } y-4 = \frac{-3}{2}(x-3) \Rightarrow 2y-8 = -3x+9 \Rightarrow 2y+3x-17=0$$

Το Β είναι σημείο τομής των ΒΓ, ΑΒ

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} x+6y-11=0 \\ 2y+3x-17=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow B(5,1)$$

Το Κ είναι μέσο και του ΒΔ. Άρα αν είναι Δ(x,y), έχουμε :

$$(5,3) = \left(\frac{x+5}{2}, \frac{y+1}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+5}{2} = 1 \\ \frac{y+1}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow \Delta(-3,5)$$

15.2 6)

Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, άρα έχουμε : $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BG}|$

Έστω Β(x,y). Επειδή $B \in B\Gamma$, είναι $y=3x+1$

$$\text{Άρα έχουμε: } |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BG}| \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (3x-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (3x+3)^2}$$

Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε : $x=0$

Επομένως είναι : Β(0,1)

$$\text{Η } A\Gamma \text{ έχει εξίσωση: } y-2 = \frac{2-(-2)}{3-(-1)}(x-3) \Rightarrow y-2 = (x-3) \Rightarrow y=x-1$$

$$\text{Είναι: } B\Delta \perp A\Gamma \Rightarrow \lambda_{B\Delta} = -1$$

Και αφού η ΒΔ διέρχεται από το Β(0,1), έχει εξίσωση :

$$y-1 = -1(x-0) \Rightarrow y = -x+1$$

Λύνοντας το σύστημα των ΒΔ, ΑΓ βρίσκουμε το μέσο Μ του ΒΔ :

$$\begin{cases} y = -x+1 \\ y = x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow M(1,0)$$

Έστω Δ(x,y). Το Μ είναι μέσο του ΒΔ, άρα είναι :

$$\left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+1}{2} \right) = (1,0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 1 \\ \frac{y+1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

15.2 7)

Το Β είναι το σημείο τομής των ΑΒ, ΒΔ

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} x-7y+20=0 \\ 2x+y-5=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow B(1,3)$$

$$\text{Είναι : } AG \perp BD, \text{ άρα } \lambda_{AG} = \frac{-1}{\lambda_{BD}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα η AG έχει εξίσωση : } y-4 = \frac{1}{2}(x-8) \Rightarrow 2y-8 = x-8 \Rightarrow x = 2y$$

Έστω K το σημείο τομής των διαγωνίων AG, BD

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow K(2,1)$$

Το K είναι το μέσο του BD. Άρα αν είναι $\Delta(x,y)$, έχουμε :

$$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+3}{2}\right) = (2,1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2} = 2 \\ \frac{y+3}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \Delta(3,-1)$$

$$\text{Είναι } \Gamma\Delta // AB \Rightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} = \lambda_{AB} = \frac{1}{7}$$

$$\text{Άρα η } \Gamma\Delta \text{ έχει εξίσωση : } y+1 = \frac{1}{7}(x-3) \Rightarrow 7y+7 = x-3 \Rightarrow x-7y-10=0$$

Το Γ είναι το σημείο τομής των AG, $\Gamma\Delta$

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} x=2y \\ x-7y-10=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(-4,-2)$$

15.2 8)

Η κορυφή A δεν ικανοποιεί τις εξισώσεις των δύο υψών, άρα τα δύο ύψη που δίνονται άγονται από τις κορυφές B και Γ .

Έστω BK, $\Gamma\Lambda$ τα δύο ύψη

$$\text{Είναι : } \Gamma\Lambda \perp AB \Rightarrow \lambda_{\Gamma\Lambda} = -\frac{1}{\lambda_{AB}} = -\frac{-1}{\frac{-3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Άρα η AB έχει εξίσωση :

$$y-4 = \frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow 3y-12 = 2x-2 \Rightarrow 3y-2x-10=0$$

$$\text{Επίσης : } BK \perp AG \Rightarrow \lambda_{BK} = -\frac{1}{\lambda_{AG}} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\text{Άρα η AG έχει εξίσωση : } y-4 = -1(x-1) \Rightarrow y-4 = -x+1 \Rightarrow x+y-5=0$$

Το B είναι το σημείο τομής των BK, AB

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} 3y-2x-10=0 \\ x-y+4=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow B(-2,2)$$

Το Γ είναι το σημείο τομής των $\Gamma\Lambda$, AG

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} x+y-5=0 \\ 3x+2y-14=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(4,1)$$

$$\text{Άρα η B}\Gamma \text{ έχει εξίσωση : } y-2 = \frac{1-2}{2+4}(x-(-2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-2 = -\frac{1}{6}(x+2) \Rightarrow -6y+12 = x+2 \Rightarrow x-6y-10=0$$

Τέλος, έστω $M(x, y)$ σημείο του ύψους που άγεται από την Α.

Τότε είναι : $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BF} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-1, y-4) \cdot (4-(-2), 1-2) = 0 \Rightarrow 6x-6-y+4=0 \Rightarrow 6x-y-2=0$$

(εξίσωση του τρίτου ύψους)

15.2 9)

Το Α δεν ικανοποιεί τις εξισώσεις των δύο πλευρών που δίνονται, άρα έστω ότι η εξίσωση $2x+3y-1=0$ αντιστοιχεί στην πλευρά ΒΓ, και ότι η εξίσωση $4x-y-9=0$ αντιστοιχεί στην πλευρά ΔΓ. Το Γ είναι το σημείο τομής τους, άρα λύνουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} 2x+3y-1=0 \\ 4x-y-9=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(2, -1)$$

Είναι : $AB // \Delta\Gamma$, άρα : $\lambda_{AB} = \lambda_{\Delta\Gamma} = 4$

Άρα η ΑΒ έχει εξίσωση : $y-5=4(x-0) \Rightarrow y=4x+5$

Το Β είναι σημείο τομής των ΑΒ, ΒΓ, άρα λύνουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} y=4x+5 \\ 2x+3y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow B(-1, 1)$$

Τέλος, είναι $A\Delta // B\Gamma \Rightarrow \lambda_{A\Delta} = \lambda_{B\Gamma} = -\frac{2}{3}$

Άρα η ΑΔ έχει εξίσωση : $y-5 = -\frac{2}{3}(x-0) \Rightarrow 3y-15 = -2x \Rightarrow 3y+2x-15=0$

Το Δ είναι το σημείο τομής των ΑΔ, ΔΓ, άρα λύνουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} 4x-y-9=0 \\ 3y+2x-15=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \Delta(3, 3)$$

15.2 10)

α) Το Α είναι το σημείο τομής των ΑΒ, ΑΔ

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} x+2y+1=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow A(-3, 1)$$

Το Κ είναι το μέσο του ΑΓ. Άρα αν είναι $\Gamma(x, y)$, έχουμε :

$$(1, 2) = \left(\frac{x-3}{2}, \frac{y+1}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{2} = 1 \\ \frac{y+1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(5, 3)$$

β) Είναι : $B\Gamma // A\Delta \Rightarrow \lambda_{B\Gamma} = \lambda_{A\Delta} = -2$ Άρα η ΒΓ έχει εξίσωση :

$$y-3 = -2(x-5) \Rightarrow y-3 = -2x+10 \Rightarrow y+2x-13=0$$

Είναι : $\Gamma\Delta // AB \Rightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} = \lambda_{AB} = -\frac{1}{2}$ Άρα η ΓΔ έχει εξίσωση :

$$y-3 = -\frac{1}{2}(x-5) \Rightarrow -2y+6 = x-5 \Rightarrow x+2y-11=0$$