

15.1 1)

- α) Είναι $\lambda_{BG} = \frac{y_G - y_B}{x_G - x_B} = \frac{6-0}{8-5} = \frac{6}{3} = 2$ οπότε η ευθεία BG (που διέρχεται πχ από το $B(5,0)$) έχει εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - 0 = 2(x - 5) \Leftrightarrow y = 2x - 10$
- β) Είναι $AD \perp BG \Rightarrow \lambda_{AD} \cdot \lambda_{BG} = -1 \Rightarrow \lambda_{AD} = -\frac{1}{2}$ οπότε η ευθεία AD (που διέρχεται από το $A(2,4)$) έχει εξίσωση $y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow 2y - 8 = -x + 2 \Leftrightarrow x + 2y - 10 = 0$
- γ) Το σημείο Δ είναι το σημείο τομής των ευθειών BG και AD οπότε για να βρούμε τις συντεταγμένες του, λύνουμε το σύστημα των ευθειών $\begin{cases} BG: y = 2x - 10 \\ AD: x + 2y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$
Επομένως το Δ έχει συντεταγμένες $\Delta(6,2)$
- δ) Το Ε είναι μέσο του AD άρα $E\left(\frac{x_A + x_D}{2}, \frac{y_A + y_D}{2}\right) = E\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = E(4,3)$
Ακόμη είναι $\lambda_{BE} = \frac{y_E - y_B}{x_E - x_B} = \frac{3-0}{4-5} = \frac{3}{-1} = -3$ οπότε η ευθεία BE (που διέρχεται πχ από το $B(5,0)$) έχει εξίσωση $y - 0 = -3(x - 5) \Rightarrow y = -3x + 15$
- ε) Το Ζ είναι μέσο του ΓΔ άρα $Z\left(\frac{x_G + x_D}{2}, \frac{y_G + y_D}{2}\right) = Z\left(\frac{8+6}{2}, \frac{6+2}{2}\right) = Z(7,4)$
Ακόμη είναι $\lambda_{AZ} = \frac{y_Z - y_A}{x_Z - x_A} = \frac{4-4}{7-2} = 0$ οπότε η ευθεία AZ έχει εξίσωση $y - 4 = 0(x - 2) \Rightarrow y = 4$
Το σημείο Η είναι το σημείο τομής των ευθειών AZ και BE οπότε για να βρούμε τις συντεταγμένες του λύνουμε το σύστημα των ευθειών $\begin{cases} AZ: y = 4 \\ BE: y = -3x + 15 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{3} \\ y = 4 \end{cases}$
Επομένως το Η έχει συντεταγμένες $H\left(\frac{11}{3}, 4\right)$

15.1 2)

- α) Το Ε είναι το μέσο του ΑΓ, άρα έχει συντεταγμένες: $E\left(\frac{-6+2}{2}, \frac{7+1}{2}\right) \Rightarrow E(-2,4)$
Άρα η BE έχει εξίσωση:
 $y - 4 = \frac{4 - (-2)}{-2 - (-4)}(x + 2) \Rightarrow y - 4 = 3(x + 2) \Rightarrow y - 4 = 3x + 6 \Rightarrow 3x - y + 10 = 0$
- β) Έστω $\kappa(x, y)$ σημείο του ύψους AD. Τότε $\overline{AK} \perp \overline{BG}$
Άρα είναι $\overline{AK} \cdot \overline{BG} = 0 \Rightarrow (x + 6, y - 7) \cdot (2 - (-4), 1 - (-2)) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x + 6, y - 7) \cdot (6, 3) = 0 \Rightarrow 6x + 36 + 3y - 21 = 0 \Rightarrow 6x + 3y + 15 = 0 \Rightarrow 2x + y + 5 = 0$
- γ) Το Ζ είναι το σημείο τομής των AD και BE.
Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους:
 $\begin{cases} 3x - y + 10 = 0 \\ 2x + y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow Z(-3, 1)$
- δ) Βρίσκουμε την εξίσωση της BG:

$$y-1 = \frac{1-(-2)}{2-(-4)}(x-2) \Rightarrow y-1 = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow 2y-2 = x-2 \Rightarrow 2y-x=0$$

Το Δ είναι το σημείο τομής των $A\Delta$ και $B\Gamma$.

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} 2x+y+5=0 \\ 2y-x=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \Delta(-2,-1)$$

ε) Χωρίζουμε το $B\Delta E A$ σε δύο τρίγωνα, τα $A\overset{\Delta}{B}\Delta$ και $A\overset{\Delta}{\Delta}E$

Τότε είναι : $(B\Delta E A) = (A\overset{\Delta}{B}\Delta) + (A\overset{\Delta}{\Delta}E) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (B\Delta E A) = \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta}) \right| + \frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{AE}) \right| \Rightarrow (B\Delta E A) = \dots = 20$$

15.1 3)

α) Το Δ είναι το μέσο του AB , άρα έχει συντεταγμένες : $\Delta\left(\frac{8-4}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) \Rightarrow \Delta(2,0)$

Άρα η $\Gamma\Delta$ έχει εξίσωση :

$$y-0 = \frac{0-(-4)}{2-(-6)}(x-2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow 2y = x-2 \Rightarrow x-2y-2=0$$

β) $d(A, \Gamma\Delta) = \frac{|(-4) - 2 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

γ) Έστω : $E(x, y)$

$$\text{Είναι : } \overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Rightarrow \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta} = 0 \Rightarrow (x-8, y+2) \cdot (2-(-6), 0-(-4)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-8, y+2) \cdot (8, 4) = 0 \Rightarrow 8x - 64 + 4y + 8 = 0 \Rightarrow 8x + 4y - 56 = 0 \Rightarrow 2x + y - 14 = 0$$

δ) Το E είναι το σημείο τομής των $\Gamma\Delta$ και BE . Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους:

$$\begin{cases} x-2y-2=0 \\ 2x+y-14=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow E(6,2)$$

15.1 4)

α) Βρίσκουμε τις εξισώσεις των $A\Gamma$ και $B\Delta$:

$$\text{Για την } A\Gamma \text{ έχουμε : } y-5 = \frac{5-(-4)}{3-6}(x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-5 = \frac{-9}{3}(x-3) \Rightarrow y-5 = -3x+9 \Rightarrow y+3x-14=0$$

$$\text{Για την } B\Delta \text{ έχουμε : } y-2 = \frac{2-(-10)}{9-(-7)}(x-9) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-2 = \frac{12}{16}(x-9) \Rightarrow 4y-8 = 3x-27 \Rightarrow 4y-3x+19=0$$

Το E είναι το σημείο τομής των $A\Gamma$ και $B\Delta$.

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} y+3x-14=0 \\ 4y-3x+19=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow E(5,-1)$$

β) Είναι : $\overrightarrow{AE} = (5-3, -1-5) = (2, -6)$

$$\text{και : } \overrightarrow{AB} = (9-3, 2-5) = (6, -3)$$

$$\text{Άρα : } \cos(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{2 \cdot 6 + 6 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 6^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Άρα} : \left(\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AB} \right) = E \hat{A} B = 45^\circ$$

γ) Έστω $\kappa(x, y)$ σημείο της EZ

$$\text{Είναι} : \overrightarrow{EK} \perp \overrightarrow{B\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-5, y+1) \cdot (6-9, -4-2) = 0 \Rightarrow (x-5, y+1)(-3, -6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x + 15 - 6y + 6 = 0 \Rightarrow -3x - 6y + 21 = 0 \Rightarrow x + 2y - 7 = 0$$

(η εξίσωση της EZ)

Το Z είναι το σημείο τομής των EZ και BΓ

$$\text{Η B}\Gamma \text{ έχει εξίσωση} : y - 2 = \frac{2 - (-4)}{9 - 6}(x - 9) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 2 = \frac{6}{3}(x - 9) \Rightarrow y - 2 = 2x - 18 \Rightarrow y - 2x + 16 = 0$$

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των EZ και BΓ :

$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ y - 2x + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow Z(7, -2)$$

δ) Χωρίζουμε το τετράπλευρο ΔΕΖΓ σε δύο τρίγωνα , τα $\triangle \hat{E} \Gamma$ και $\triangle \hat{E} Z$

Τότε έχουμε : $(\Delta EZ\Gamma) = (\Delta E\Gamma) + (\Gamma EZ) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\Delta EZ\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{E\Delta}, \overrightarrow{E\Gamma})| + \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{E\Gamma}, \overrightarrow{EZ})| \Rightarrow (\Delta EZ\Gamma) = \dots = 25$$

15.1 5)

α) Το Z είναι το μέσο του ΔΓ , άρα έχει συντεταγμένες $Z\left(\frac{4-4}{2}, \frac{-2-3}{2}\right) \Rightarrow Z\left(0, \frac{-5}{2}\right)$

$$\text{Άρα η AZ έχει εξίσωση} : y - \left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{\frac{-5}{2} - 2}{0 - (-6)}(x - 0) \Rightarrow y + \frac{5}{2} = \frac{-9}{12}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12y + 30 = -9x \Rightarrow 9x + 12y + 30 = 0 \Rightarrow 3x + 4y + 10 = 0$$

$$\text{Άρα} : d(B, AZ) = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{30}{5} = 6$$

β) Η BΓ έχει εξίσωση : $y - 5 = \frac{5 - (-3)}{0 - 4}(x - 0) \Rightarrow y - 5 = -2x \Rightarrow y + 2x - 5 = 0$

Έστω $\kappa(x, y)$ σημείο της ΔΕ

$$\text{Είναι} : \overrightarrow{\Delta K} \perp \overrightarrow{B\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{\Delta K} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0 \Rightarrow (x+4, y+2) \cdot (4-0, -3-5) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+4, y+2)(4, -8) = 0 \Rightarrow 4x + 16 - 8y - 16 = 0 \Rightarrow 4x - 8y = 0 \Rightarrow x = 2y$$

(η εξίσωση της ΔΕ)

Το E είναι το σημείο τομής των ΔΕ και BΓ.

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} y + 2x - 5 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow E(2, 1)$$

γ) Το H είναι το σημείο τομής των AZ και ΔΕ.

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} 3x + 4y + 10 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow H(-2, -1)$$

$$\delta) \text{ Η ΓΗ έχει εξίσωση : } y - (-1) = \frac{-1 - (-3)}{-2 - 4}(x - (-2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 1 = \frac{-2}{6}(x + 2) \Rightarrow 3y + 3 = -x - 2 \Rightarrow 3y + x + 5 = 0$$

$$\text{Η ΑΔ έχει εξίσωση : } y - (-2) = \frac{-2 - 2}{-4 - (-6)}(x - (-4)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 2 = \frac{-4}{2}(x + 4) \Rightarrow y + 2 = -2x - 8 \Rightarrow y + 2x + 10 = 0$$

Το Θ είναι το σημείο τομής των $\Gamma\Theta$ και $\Lambda\Delta$.

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους :

$$\begin{cases} 3y + x + 5 = 0 \\ y + 2x + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \Theta(-5, 0)$$

ε) Χωρίζουμε το $ABEH\Theta$ σε τρία τρίγωνα, τα $\overset{\Delta}{A}\overset{\Delta}{\Theta}H$, $\overset{\Delta}{A}\overset{\Delta}{H}E$, $\overset{\Delta}{A}\overset{\Delta}{E}B$

$$\text{Τότε έχουμε : } (ABEH\Theta) = (A\Theta H) + (AHE) + (AEB) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ABEH\Theta) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{A\Theta}, \overrightarrow{AH})| + \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AE})| + \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB})| \Rightarrow (ABEH\Theta) = \dots = 27,5$$

15.1 6)

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$ είναι : $\lambda = \lambda_{\overrightarrow{B\Gamma}} = \frac{2-6}{-1-3} = \frac{-4}{-4} = 1$

β) Έστω $\kappa(x, y)$ σημείο της ευθείας του ύψους που άγεται από το A

$$\text{Τότε είναι : } \overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{B\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0 \Rightarrow (x-2, y-5) \cdot (-1-3, 2-6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2, y-5) \cdot (-4, -4) = 0 \Rightarrow -4x + 8 - 4y + 20 = 0 \Rightarrow x + y - 7 = 0$$

γ) $\epsilon\phi\omega = \lambda_{AB} = \frac{6-5}{3-2} = 1$

Άρα η γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$ είναι 45°