

14.2 1)

α) Είναι $\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_{\Gamma} - y_B}{x_{\Gamma} - x_B} = \frac{\beta - 0}{0 - \alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$ οπότε η ευθεία BΓ (που διέρχεται πχ από το $\Gamma(0, \beta)$) έχει εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - \beta = -\frac{\beta}{\alpha}x \Leftrightarrow \alpha y - \alpha\beta = -\beta x \Leftrightarrow \beta x + \alpha y - \alpha\beta = 0$

β) Ακόμη είναι $AK \perp B\Gamma \Rightarrow \lambda_{AK} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Rightarrow \lambda_{AK} = \frac{\alpha}{\beta}$ οπότε η ευθεία AK (που διέρχεται από το $A(0, 0)$) έχει εξίσωση $y = \frac{\alpha}{\beta} \cdot x \Leftrightarrow \alpha x - \beta y = 0$

γ) Το σημείο K, είναι το σημείο τομής των ευθειών BΓ και AK, οπότε για να βρούμε τις συντεταγμένες του, λύνουμε το σύστημα των ευθειών

$$\begin{cases} B\Gamma: \beta x - \alpha y + \alpha\beta = 0 \\ AK: \alpha x + \beta y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot \beta x - \alpha y = -\alpha\beta \\ -\beta \cdot \alpha x + \beta y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{\alpha\beta x} - \alpha^2 y = -\alpha^2 \beta \\ -\cancel{\alpha\beta x} - \beta^2 y = 0 \end{cases} (+) \\ (-\alpha^2 - \beta^2)y = -\alpha^2 \beta \Leftrightarrow y = \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\text{Ακόμη } \alpha x - \beta y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\beta}{\alpha} y \Leftrightarrow x = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \text{ και άρα } K\left(\frac{\alpha \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right)$$

δ) Το H είναι μέσο του AB άρα έχει συντεταγμένες $H\left(\frac{0+\alpha}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = H\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$

Το Θ είναι μέσο του AG άρα έχει συντεταγμένες $\Theta\left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+\beta}{2}\right) = H\left(0, \frac{\beta}{2}\right)$

Οπότε

$$\overrightarrow{KH} = \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, 0 - \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right) = \left(\frac{\alpha^3 + \cancel{\alpha\beta^2} - \cancel{\alpha\beta^2}}{2(\alpha^2 + \beta^2)}, -\frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right) = \left(\frac{\alpha(\alpha^2 - \beta^2)}{2(\alpha^2 + \beta^2)}, -\frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right)$$

$$\text{και } \overrightarrow{K\Theta} = \left(0 - \frac{\alpha \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2}\right) = \left(-\frac{\alpha \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\cancel{\alpha^2 \beta} + \beta^3 - \cancel{\alpha^2 \beta}}{2(\alpha^2 + \beta^2)}\right) = \left(-\frac{\alpha \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\beta(\beta^2 - \alpha^2)}{2(\alpha^2 + \beta^2)}\right)$$

$$\text{Επομένως } \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{K\Theta} = -\frac{\alpha(\alpha^2 - \beta^2)\alpha\beta^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)^2} - \frac{\alpha^2 \beta \cdot \beta(\beta^2 - \alpha^2)}{2(\alpha^2 + \beta^2)} = 0, \text{ που σημαίνει } KH \perp K\Theta$$

14.2 2)

α) Είναι: $\Gamma\Delta // AB \Rightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} = \lambda_{AB} = \epsilon\phi 45 = 1$

Άρα η ΓΔ έχει εξίσωση: $y - 0 = 1 \cdot (x - \alpha) \Rightarrow y = x - \alpha$

β) Η AB έχει εξίσωση: $y - 0 = \lambda_{AB}(x - 0) \Rightarrow y = x$

$B \in AB$ και το B έχει τεταγμένη $y = \beta$, άρα είναι και $x = y = \beta$

Οπότε: $B(\beta, \beta)$ Έστω $\Gamma(x, y)$

$$\text{Είναι: } \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} \Rightarrow (x - \beta, y - \beta) = (\alpha, 0) \Rightarrow \begin{cases} x - \beta = \alpha \\ y - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \end{cases}$$

Άρα είναι $\Gamma(\alpha+\beta, \beta)$

γ) Το M είναι το μέσο του ΔΓ άρα έχει συντεταγμένες

$$M\left(\frac{\alpha+\beta+\alpha}{2}, \frac{0+\beta}{2}\right) \Rightarrow M\left(\alpha+\frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$$

$$\text{Επίσης : } EZ \perp \Delta\Gamma \Rightarrow \lambda_{EZ} = -\frac{1}{\lambda_{\Delta\Gamma}} \Rightarrow \lambda_{EZ} = -1$$

Οπότε η EZ έχει εξίσωση :

$$y - \frac{\beta}{2} = -\left(x - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\right) \Rightarrow y - \frac{\beta}{2} = -x + \alpha + \frac{\beta}{2} \Rightarrow y = -x + \alpha + \beta$$

$$\delta) \text{ Είναι : } \overrightarrow{\Gamma\Delta} = (\alpha - (\alpha + \beta), 0 - \beta) = (\beta, -\beta) \Rightarrow |\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = \sqrt{2\beta^2}$$

$$\text{και } Z \in EZ, \text{ άρα } 0 = -x + \alpha + \beta \Rightarrow x = \alpha + \beta$$

$$\text{άρα είναι } Z(\alpha + \beta, 0) \quad (1)$$

$$\text{Επίσης : } E \in EZ \text{ άρα } \beta = -x + \alpha + \beta \Rightarrow x = \alpha$$

$$\text{Οπότε είναι : } E(\alpha, \beta)$$

$$\text{Άρα είναι : } \overrightarrow{EZ} = (\alpha - (\alpha + \beta), 0 - \beta) = (-\beta, -\beta) \Rightarrow |\overrightarrow{EZ}| = \sqrt{2\beta^2} \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2) έχουμε : } |\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = |\overrightarrow{EZ}|$$

14.2 3)

$$\alpha) \text{ Το O είναι μέσο του ΑΓ , άρα έχει συντεταγμένες: } O\left(\frac{0+\alpha}{2}, \frac{0+\alpha}{2}\right) \Rightarrow O\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{Το M είναι μέσο του ΟΓ , άρα έχει συντεταγμένες: } M\left(\frac{\frac{\alpha}{2}+\alpha}{2}, \frac{\frac{\alpha}{2}+\alpha}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3\alpha}{4}, \frac{3\alpha}{4}\right)$$

Η BE διέρχεται από τα Β και Μ , άρα έχει εξίσωση

$$y - 0 = \frac{\frac{3\alpha}{4} - 0}{\frac{3\alpha}{4} - \alpha} (x - \alpha) \Rightarrow y = -3(x - \alpha) \Rightarrow y = -3x + 3\alpha$$

$$\beta) \text{ Το E ανήκει στην BE και έχει τεταγμένη } y = \alpha, \text{ άρα έχουμε } \alpha = -3x + 3\alpha \Rightarrow 3x = 2\alpha \Rightarrow x = \frac{2\alpha}{3}$$

$$\text{Άρα είναι } E\left(\frac{2\alpha}{3}, \alpha\right)$$

$$\gamma) \text{ Το Z ανήκει στην ΟΖ που είναι παράλληλη στην ΑΒ , άρα έχει τεταγμένη } y = \frac{\alpha}{2}$$

Επίσης ανήκει στην BE , άρα έχουμε :

$$\frac{\alpha}{2} = -3x + 3\alpha \Rightarrow 3x = \frac{5\alpha}{2} \Rightarrow x = \frac{5\alpha}{6}$$

$$\text{Άρα είναι } Z\left(\frac{5\alpha}{6}, \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{Οπότε είναι : } \overrightarrow{EZ} = \left(\alpha - \frac{2\alpha}{3}, \alpha - \alpha\right) = \left(\frac{\alpha}{3}, 0\right) \Rightarrow |\overrightarrow{EZ}| = \frac{\alpha}{3}$$

$$\text{Και } \overrightarrow{OZ} = \left(\frac{5\alpha}{6} - \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \left(\frac{\alpha}{3}, 0 \right) \Rightarrow |\overrightarrow{OZ}| = \frac{\alpha}{3}$$

Είναι $\overrightarrow{E\Gamma} // \overrightarrow{OZ}$ και $|\overrightarrow{E\Gamma}| = |\overrightarrow{OZ}|$ άρα το ΟΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο

14.2 4)

α) Η ευθεία ΑΓ έχει εξίσωση :

$$y - 0 = \frac{\beta - 0}{0 - (-\alpha)}(x - (-\alpha)) \Rightarrow y = \frac{\beta}{\alpha}(x + \alpha) \Rightarrow \alpha y = \beta x + \beta \alpha \Rightarrow \beta x - \alpha y + \alpha \beta = 0$$

β) Έστω $E(x, y)$

Είναι $\overrightarrow{OE} \perp \overrightarrow{AG}$ με $\overrightarrow{AG} = (-\alpha, -\beta)$

$$\text{Άρα } \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow (x, y)(-\alpha, -\beta) = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y = 0$$

γ) Το Ε θα βρεθεί από την λύση του συστήματος εξισώσεων των ΟΕ, ΑΓ (άγνωστοι τα x, y)

$$\begin{cases} \beta x - \alpha y + \alpha \beta = 0 \\ \alpha x + \beta y = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\alpha \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \\ y = \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}$$

$$\delta) \text{ Είναι } \overrightarrow{BE} = \left(\frac{-\alpha \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha, \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2} - 0 \right) = \left(\frac{-\alpha \beta^2 - \alpha^3 - \alpha \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$$

$$\text{και } \overrightarrow{OZ} = \frac{\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG}}{2} = \left(\frac{-\alpha \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) + (-\alpha, 0) = \left(\frac{-\alpha \beta^2 - \alpha^3 - \alpha \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) = \frac{\overrightarrow{BE}}{2}$$

$$\text{Είναι } \overrightarrow{OZ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BE} \Rightarrow \overrightarrow{OZ} // \overrightarrow{BE}$$

ε) Το Η είναι μέσο του ΟΕ άρα έχει συντεταγμένες $\left(\frac{-\alpha \beta^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)}, \frac{\alpha^2 \beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \right)$

$$\text{Είναι } \overrightarrow{AH} = \left(\frac{-\alpha \beta^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)}, \frac{\alpha^2 \beta}{2(\alpha^2 + \beta^2)} - \beta \right)$$

$$\text{Και } \overrightarrow{BE} = \left(\frac{-\alpha \beta^2 - \alpha^3 - \alpha \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{\alpha^2 \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$$

$$\text{Άρα : } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{(\alpha \beta^2)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)^2} + \frac{\alpha^4 \beta^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)^2} + \frac{\alpha^2 + \beta^4}{2(\alpha^2 + \beta^2)^2} + \frac{(\alpha^2 \beta)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)^2} - \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} =$$

$$= \frac{\alpha^2 \beta^4}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} + \frac{\alpha^4 \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} - \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha^2 \beta^2 (\alpha^2 + \beta^2)^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} - \frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = 0$$

$$\text{Άρα } \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BE}$$

14.2 5)

α) Η ΒΓ έχει εξίσωση :

$$y - 0 = \frac{\beta - 0}{0 - \alpha}(x - \alpha) \Rightarrow y = -\frac{\beta}{\alpha}(x - \alpha) \Rightarrow \alpha y = -\beta x + \alpha \beta \Rightarrow \alpha y + \beta x - \alpha \beta = 0$$

β) Η ΑΔ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \tan 45 = 1$

άρα έχει εξίσωση $y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$

Όμως το Δ ανήκει και στην $B\Gamma$, άρα είναι :

$$\alpha x + \beta x - \alpha\beta = 0 \Rightarrow x(\alpha + \beta) = \alpha\beta \Rightarrow x = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} = y$$

$$\text{Άρα είναι } \Delta \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \right)$$

γ) Είναι : $\Delta Z \perp B\Gamma \Rightarrow \lambda_{\Delta Z} = -\frac{1}{\lambda_{B\Gamma}} = -\frac{1}{\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\alpha}{\beta}$

$$\text{Άρα η } \Delta Z \text{ έχει εξίσωση : } y - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha}{\beta} \left(x - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \right) \Rightarrow \beta y - \frac{\alpha\beta^2}{\alpha + \beta} = \alpha x - \frac{\alpha^2\beta}{\alpha + \beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta)(\beta y) - \alpha\beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha x) - \alpha^2\beta \Rightarrow \alpha(\alpha + \beta)x - \beta(\alpha + \beta)y + \alpha\beta(\beta - \alpha) = 0$$

δ) Το E έχει τετμημένη $x = 0$ και ανήκει στην ΔZ , άρα έχουμε :

$$\alpha(\alpha + \beta) \cdot 0 - \beta(\alpha + \beta)y + \alpha\beta(\beta - \alpha) = 0 \Rightarrow y = \frac{\alpha\beta(\beta - \alpha)}{\beta(\alpha + \beta)} = \frac{\alpha\beta - \alpha^2}{\beta(\alpha + \beta)}$$

$$\text{Άρα είναι } E \left(0, \frac{\alpha\beta - \alpha^2}{\alpha + \beta} \right)$$

ε) Το Z έχει τεταγμένη $y = 0$ και ανήκει στην ΔZ , άρα έχουμε :

$$\alpha(\alpha + \beta)x - \beta(\alpha + \beta) \cdot 0 + \alpha\beta(\beta - \alpha) = 0 \Rightarrow x = -\frac{\alpha\beta(\beta - \alpha)}{\alpha(\alpha + \beta)} = \frac{-\beta^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

$$\text{Άρα είναι : } Z \left(\frac{\alpha\beta - \beta^2}{\alpha + \beta}, 0 \right)$$

$$\text{Οπότε : } \overrightarrow{BZ} = \left(\frac{\alpha\beta - \beta^2}{\alpha + \beta} - \alpha, 0 \right) = \left(\frac{\alpha\beta - \beta^2 - \alpha^2 - \alpha\beta}{\alpha + \beta}, 0 \right) = \left(\frac{-\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta}, 0 \right)$$

$$\text{Και : } \overrightarrow{\Gamma E} = \left(0, \frac{\alpha\beta - \alpha^2}{\alpha + \beta} - \beta \right) = \left(0, \frac{\alpha\beta - \alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2}{\alpha + \beta} \right) = \left(0, \frac{-\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} \right)$$

$$\text{Άρα είναι : } |BZ| = |\Gamma E| = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta}$$