

14.1 1)

$$\text{Είναι } \lambda_{B\Gamma} = \frac{y_{\Gamma} - y_B}{x_{\Gamma} - x_B} = \frac{-2-8}{-3+13} = \frac{-10}{10} = -1$$

οπότε η ευθεία BΓ (που διέρχεται πχ από το B(-13,8)) έχει εξίσωση

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - 8 = -1(x + 13) \Leftrightarrow y = -x - 5$$

Ακόμη είναι $AK \perp B\Gamma \Rightarrow \lambda_{AK} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \xRightarrow{\lambda_{B\Gamma} = -1} \lambda_{AK} = 1$ οπότε η ευθεία AK (που διέρχεται από το A(-7,-4)) έχει εξίσωση $y + 4 = 1 \cdot (x + 7) \Leftrightarrow y = x + 3$

Έτσι το σημείο K, που είναι το σημείο τομής των ευθειών BΓ και AK, θα βρούμε τις συντεταγμένες του, λύνοντας το σύστημα των ευθειών
$$\begin{cases} B\Gamma : y = -x - 5 \\ AK : y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$$

Επομένως το K έχει συντεταγμένες K(-4,-1)

Ακόμη

Το H είναι μέσο του AB οπότε έχει συντεταγμένες $H\left(\frac{-7-13}{2}, \frac{-4+8}{2}\right) = H(-10, 2)$

Το Θ είναι μέσο του AG οπότε έχει συντεταγμένες $\Theta\left(\frac{-7-3}{2}, \frac{-4-2}{2}\right) = \Theta(-5, -3)$

Επομένως το διάνυσμα $\overrightarrow{KH}$ έχει συντεταγμένες $\overrightarrow{KH} = (-10+4, 2+1) = (-6, 3)$

το διάνυσμα $\overrightarrow{K\Theta}$ έχει συντεταγμένες $\overrightarrow{K\Theta} = (-5+4, -3+1) = (-1, -2)$

Επομένως $\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{K\Theta} = -6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) = 0$ οπότε $KH \perp K\Theta$

14.1 2)

α) Είναι : $\overrightarrow{AB} = (-2, -1) - (-6, -3) = (4, 2)$

Και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (2, -2) - (-4, -5) = (6, 3)$

Είναι : $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{\Delta\Gamma} // \overrightarrow{AB}$ άρα το ABΓΔ είναι τραπέζιο

β) Είναι :

- $\overrightarrow{B\Gamma} = (2, -2) - (-2, -1) = (4, -1) \Rightarrow \overrightarrow{B\Gamma} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

- $\overrightarrow{\Delta A} = (-6, -3) - (-4, -5) = (-2, 2)$

Η πλευρά BΓ έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y + 1 = \frac{-1 - (-2)}{-2 - 2}(x + 2) \Rightarrow -4y - 4 = x + 2 \Rightarrow x + 4y + 6 = 0$$

Και το M έχει συντεταγμένες : $M\left(\frac{-6-4}{2}, \frac{-3-5}{2}\right) \Rightarrow M(-5, -4)$

$$\text{Οπότε : } d(M, B\Gamma) = \frac{|-5 + 4(-4) + 6|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{15}{\sqrt{17}}$$

$$\text{Άρα : } (B\Gamma) \cdot d(M, B\Gamma) = \sqrt{17} \cdot \frac{15}{\sqrt{17}} = 15 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Και : } (AB\Gamma\Delta) &= (AB\Gamma) + (A\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{\Gamma B} \end{pmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\Delta A} & \overrightarrow{\Delta \Gamma} \end{pmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |4+8| + \frac{1}{2} |-6-12| = 6+9 \Rightarrow (AB\Gamma\Delta) = 15 \end{aligned} \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει το ζητούμενο : $(AB\Gamma\Delta) = (B\Gamma) \cdot d(M, B\Gamma)$

14.1 3)

α) Είναι : $\overrightarrow{AB} = (2, 2) - (-4, 0) = (6, 2)$

Και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (7, 1) - (-5, -3) = (12, 4)$

Είναι : $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ άρα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο

β) Το K είναι μέσο της AB , άρα έχει συντεταγμένες : $K\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow K(-1, 1)$

Το Λ είναι μέσο της $\Delta\Gamma$, άρα έχει συντεταγμένες : $\Lambda\left(\frac{-5+7}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) \Rightarrow \Lambda(1, -1)$

Άρα έχουμε : $\overrightarrow{\Delta A} = (-4, 0) - (-5, -3) = (1, 3)$

$\overrightarrow{\Delta\Lambda} = (1, -1) - (-5, -3) = (6, 2)$

$\overrightarrow{\Delta K} = (-1, 1) - (-5, -3) = (4, 4)$

$\overrightarrow{BK} = (-1, 1) - (2, 2) = (-3, -1)$

$\overrightarrow{B\Gamma} = (7, 1) - (2, 2) = (5, -1)$

$\overrightarrow{B\Lambda} = (1, -1) - (2, 2) = (-1, -3)$

Οπότε : $(AK\Lambda\Delta) = (AK\Delta) + (K\Delta\Lambda) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\Delta A} & \overrightarrow{\Delta K} \end{pmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{\Delta K} & \overrightarrow{\Delta\Lambda} \end{pmatrix} \right| =$

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |4-12| + \frac{1}{2} |8-24| = 12$$

Και : $(KB\Gamma\Lambda) = (KB\Lambda) + (B\Lambda\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{BK} & \overrightarrow{B\Lambda} \end{pmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{B\Lambda} & \overrightarrow{B\Gamma} \end{pmatrix} \right| =$

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |9-1| + \frac{1}{2} |1+15| = 4+8 = 12$$

Επομένως : $(AK\Lambda\Delta) = (KB\Gamma\Lambda)$

14.1 4)

Είναι : $\overrightarrow{AB} = (0, 1) - (1, 6) = (-1, -5)$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = (6, -1) - (0, 1) = (6, -2)$

Οπότε : $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} & \overrightarrow{B\Gamma} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |2+30| = 16$

Το Δ είναι το μέσο του $B\Gamma$ άρα έχει συντεταγμένες : $\Delta\left(\frac{0+6}{2}, \frac{1-1}{2}\right) \Rightarrow \Delta(3, 0)$

Το E είναι το μέσο του $A\Delta$ άρα έχει συντεταγμένες : $E\left(\frac{1+3}{2}, \frac{6+0}{2}\right) \Rightarrow E(2, 3)$

Το Z είναι το μέσο του $E\Gamma$ άρα έχει συντεταγμένες : $Z\left(\frac{2+6}{2}, \frac{3-1}{2}\right) \Rightarrow Z(4, 1)$

Το Η είναι το μέσο του ΒΖ άρα έχει συντεταγμένες : $H\left(\frac{0+4}{2}, \frac{1+1}{2}\right) \Rightarrow H(2,1)$

Οπότε : $\overrightarrow{EH} = (2,1) - (2,3) = (0,2)$ και $\overrightarrow{EZ} = (4,1) - (2,3) = (2,-2)$

Άρα : $(HEZ) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{EH} & \overrightarrow{EZ} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |4| = 2 \Rightarrow (HEZ) = \frac{1}{8} 16 = \frac{1}{8} (AB\Gamma)$

14.1 5)

Το Δ είναι το μέσο της ΒΓ άρα έχει συντεταγμένες $\Delta\left(\frac{-5+5}{2}, \frac{-5-5}{2}\right) \Rightarrow \Delta(0,-5)$

Θα βρούμε τώρα τις συντεταγμένες των Ζ και Ε

Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση : $y - (-7) = \frac{-7 - (-5)}{-1 - (-5)} (x - (-1)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y + 7 = \frac{-2}{4} (x + 1) \Rightarrow 4y + 28 = -2x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y + 2x + 30 = 0 \Rightarrow 2y + x + 15 = 0$$

Έστω : $Z(x, y)$ Τότε : $\overrightarrow{\Gamma Z} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{\Gamma Z} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x - 5, y + 5) \cdot (-4, 2) = 0 \Rightarrow -4x + 20 + 2y + 10 = 0 \Rightarrow 2y - 4x + 30 = 0$$

Ομως : $Z \in AB$, άρα λύνουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} 2y + x + 15 = 0 \\ 2y - 4x + 30 = 0 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases} 2y + x + 15 = 0 \\ 5x - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + x + 15 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -9 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow Z(3, -9)$$

Άρα : $\overrightarrow{Z\Delta} = (0 - 3, -5 - (-9)) = (-3, 4) \Rightarrow |\overrightarrow{Z\Delta}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad (1)$

Η ευθεία ΑΓ έχει εξίσωση : $y - (-7) = \frac{-7 - 5(-5)}{-1 - 5} (x - (-1)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y + 7 = \frac{-2}{-6} (x + 1) \Rightarrow -6y - 42 = -2x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 6y - 40 = 0 \Rightarrow x - 3y - 20 = 0$$

Έστω : $E(x, y)$ Τότε : $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x - (-5), y - (-5)) \cdot (5 - (-1), -5(-7)) = 0 \Rightarrow (x + 5, y + 5) \cdot (6, 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x + 30 + 2y + 10 = 0 \Rightarrow 6x + 2y + 40 = 0 \Rightarrow 3x + y + 20 = 0$$

Ομως : $E \in AG$, άρα λύνουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} x - 3y - 20 = 0 \\ 3x + y + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 20 \\ 3(3y + 20) + y + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 20 \\ 9y + 60 + y + 20 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3y + 20 \\ 10y = -80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -8 \end{cases} \Rightarrow E(-4, -8)$$

Άρα : $\overrightarrow{E\Delta} = (0 - (-4), -5 - (-8)) = (4, 3) \Rightarrow |\overrightarrow{E\Delta}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad (2)$

Από (1) και (2) έχουμε $Z\Delta = E\Delta$

14.1 6)

α) Το Δ είναι το μέσο της ΒΓ άρα έχει συντεταγμένες $\Delta\left(\frac{6-2}{2}, \frac{2+14}{2}\right) \Rightarrow \Delta(2,8)$

$$\text{Η ευθεία } \Delta\Gamma \text{ έχει εξίσωση : } y-4 = \frac{4-2}{-4-6}(x-(-4)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-4 = \frac{2}{-10}(x+4) \Rightarrow -10y+40 = 2x+8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+10y-32=0 \Rightarrow x+5y-16=0$$

$$\text{Έστω : } E(x,y) \text{ Τότε : } \overrightarrow{\Delta E} \perp \overrightarrow{A\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{\Delta E} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2, y-8) \cdot (6-(-4), 2-4) = 0 \Rightarrow (x-2, y-8) \cdot (10, -2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x-20-2y+16=0 \Rightarrow 10x-2y-4=0 \Rightarrow 5x-y-2=0$$

Όμως : $E \in \Delta\Gamma$, άρα λύνουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} x+5y-16=0 \\ 5x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=16-5y \\ 5(16-5y)-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=16-5y \\ 80-25y-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=16-5y \\ 26y=78 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow E(1,3)$$

Το Z είναι το μέσο της ΓE άρα έχει συντεταγμένες $Z\left(\frac{6+1}{2}, \frac{2+3}{2}\right) \Rightarrow Z\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$\text{Άρα είναι : } \overrightarrow{\Delta Z} = \left(\frac{7}{2}-2, \frac{5}{2}-8\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right)$$

$$\text{Και : } \overrightarrow{BE} = (1-(-2), 3-14) = (3, -11)$$

$$\text{Είναι : } \overrightarrow{\Delta Z} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BE} \Rightarrow \overrightarrow{\Delta Z} // \overrightarrow{BE}$$

β) Το H είναι το μέσο της $E\Delta$ άρα έχει συντεταγμένες $H\left(\frac{1+2}{2}, \frac{3+8}{2}\right) \Rightarrow H\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$

$$\text{Άρα είναι : } \overrightarrow{AH} = \left(\frac{3}{2}-(-4), \frac{11}{2}-4\right) = \left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Και : } \overrightarrow{BE} = (3, -11)$$

$$\text{Οπότε : } \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AH} = 3 \cdot \frac{11}{2} - 11 \cdot \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{AH}$$

14.1 7)

α) Είναι : $\Delta(-K, -K), E(0, -K),$

$$H(-2K, 0), Z(-2K, 2K)$$

Άρα η $\Gamma\Delta$ έχει εξίσωση :

$$y-(-K) = \frac{-K-2K}{-K-0}(x-(-K)) \Rightarrow$$

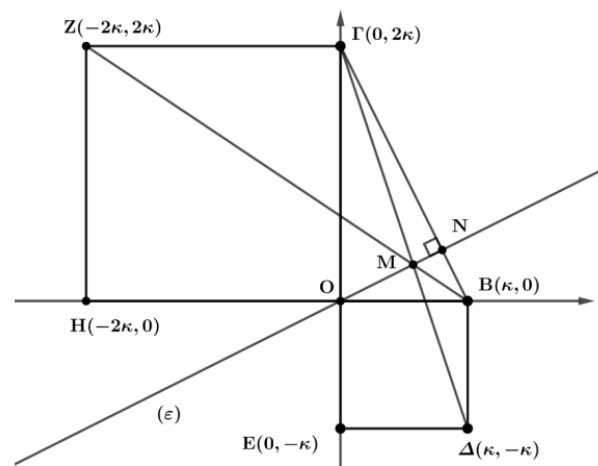
$$\Rightarrow y+K = 3(x+K) \Rightarrow y-3x-2K=0$$

Και η BZ έχει εξίσωση :

$$y-(2K) = \frac{2K-0}{-2K-K}(x-(-2K)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-2K = -\frac{2}{3}(x+2K) \Rightarrow 3y-6K = -2x-4K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y+2x-2K=0$$



β) Έστω OK το ζητούμενο ύψος, με $K(x, y)$

Είναι :

$$\overrightarrow{OK} \perp \overrightarrow{BG} \Rightarrow (x, y) \cdot (\kappa - O, O - 2\kappa) = 0 \Rightarrow \kappa x - 2\kappa y = 0 \Rightarrow x - 2y = 0$$

γ) Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ΓΔ και ΒΓ :

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3y + 2x - 2\kappa = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3y + 4y - 2\kappa = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4\kappa}{7} \\ y = \frac{2\kappa}{7} \end{cases}$$

Άρα το σημείο τομής των ΓΔ, ΒΓ είναι το $M\left(\frac{4\kappa}{7}, \frac{2\kappa}{7}\right)$

Παρατηρούμε ότι το $M\left(\frac{4\kappa}{7}, \frac{2\kappa}{7}\right)$ ανήκει και στην ΒΖ, αφού οι συντεταγμένες του

επαληθεύουν την εξίσωσή της :

$$3 \cdot \left(\frac{2\kappa}{7}\right) + 2 \cdot \left(\frac{4\kappa}{7}\right) - 2\kappa = 0 \Leftrightarrow 2\kappa - 2\kappa = 0 \text{ που ισχύει}$$