

10.6 1)

Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \equiv M\left(\frac{7+1}{2}, \frac{10-8}{2}\right) \equiv M(4,1)$$

Είναι $\lambda_{ME} = \frac{y_M - y_E}{x_M - x_E} = \frac{1-13}{4-10} = \frac{-12}{-6} = 2$ οπότε η ευθεία ΜΕ (που διέρχεται πχ από το Μ(4,1))

έχει εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 2(x - 4) \Rightarrow y - 1 = 2x - 8 \Rightarrow y = 2x - 7$

Ακόμη είναι $\lambda_{AE} = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{13-10}{10-7} = \frac{3}{3} = 1$ και επειδή $B\Gamma \perp AE$ είναι $\lambda_{B\Gamma} = -1$ οπότε η ευθεία

$B\Gamma$ (που διέρχεται από το $\Gamma(1, -8)$) έχει εξίσωση

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y + 8 = -(x - 1) \Rightarrow y + 8 = -x + 1 \Rightarrow y = -x - 7$$

Τέλος το Β είναι το σημείο τομής των ευθειών ΜΕ και ΒΓ επομένως οι συντεταγμένες του θα βρεθούν από την λύση του συστήματος

$$\begin{cases} ME: y = 2x - 7 \\ B\Gamma: y = -x - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x - 7 = -x - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -7 \\ x = 0 \end{cases} \text{ . Επομένως είναι } B(0, -7)$$

10.6 2)

Η ΑΓ έχει : $\lambda_{AG} = \frac{y_G - y_A}{x_G - x_A} = \frac{-2-4}{7-(-2)} = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$

Άρα η ΑΓ (που διέρχεται π.χ. από το Α(-2,4)) έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = -\frac{2}{3}(x - (-2)) \Rightarrow 3y - 12 = -2x - 4 \Rightarrow 3y + 2x - 8 = 0$$

Ακόμη είναι : $\lambda_{BA} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1-5}{-3-5} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$

Άρα η ΒΔ (που διέρχεται π.χ. από το Β(5,5)) έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 5 = \frac{3}{4}(x - 5) \Rightarrow 4y - 20 = 3x - 15 \Rightarrow 4y - 3x - 5 = 0$$

Τέλος το Ε είναι το σημείο τομής των ευθειών ΑΓ και ΒΔ , επομένως οι συντεταγμένες του θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} A\Gamma: 3y + 2x - 8 = 0 \\ B\Delta: 4y - 3x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8-3y}{2} \\ 4y - \frac{3}{2}(8-3y) - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8-3y}{2} \\ 8y - 24 + 9y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{8-3y}{2} \\ 17y = 34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Επομένως είναι Ε(1,2)

10.6 3)

Αρχικά η ΑΕ διέρχεται από το μέσο Μ του ΒΓ , που έχει συντεταγμένες

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = M\left(\frac{8+6}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = M(7, 2)$$

$$\text{Είναι λοιπόν : } \lambda_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{2-6}{7-(-5)} = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3}$$

Οπότε η ευθεία : AM (που διέρχεται π.χ. από το A(-5,6)) έχει εξίσωση :

$$y - y_o = \lambda(x - x_o) \Rightarrow y - 6 = \frac{-1}{3}(x + 5) \Rightarrow 3y - 18 = -x - 5 \Rightarrow 3y + x - 13 = 0$$

$$\text{Ακόμη είναι : } \lambda_{BA} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2-5}{-6-8} = \frac{-7}{-14} = \frac{1}{2}$$

Οπότε η ευθεία BΔ (που διέρχεται π.χ. από το B(8,5)) έχει εξίσωση :

$$y - y_o = \lambda(x - x_o) \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2}(x - 8) \Rightarrow 2y - 10 = x - 8 \Rightarrow 2y - x - 2 = 0$$

Τέλος , το E είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών AM και BΔ , επομένως οι συντεταγμένες του θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} AM: 3y + x - 13 = 0 \\ B\Delta: 2y - x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Επομένως είναι E(4,3)

10.6 4)

$$\text{Είναι } \lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{y_{\Delta} - y_{\Gamma}}{x_{\Delta} - x_{\Gamma}} = \frac{7-(-5)}{-2-4} = -2$$

Οπότε η ευθεία ΓΔ (που διέρχεται π.χ. από το Γ(4,-5)) έχει εξίσωση :

$$y - y_o = \lambda(x - x_o) \Rightarrow y + 5 = -2(x - 4) \Rightarrow y + 5 = -2x + 8 \Rightarrow y + 2x - 3 = 0$$

Η AB είναι κάθετη στην ΓΔ , άρα θα έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{AB} = -\frac{1}{\lambda_{\Gamma\Delta}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Άρα η ευθεία AB (που διέρχεται π.χ. από το A(6,1)) έχει εξίσωση :

$$y - y_o = \lambda(x - x_o) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x - 6) \Rightarrow 2y - 2 = x - 6 \Rightarrow 2y - x + 4 = 0$$

Τέλος το B είναι το σημείο τομής των ευθειών AB και ΓΔ επομένως οι συντεταγμένες του θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} AB: 2y - x + 4 = 0 \\ \Gamma\Delta: y + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Επομένως είναι B(2,-1)

10.6 5)

$$\text{Είναι } \lambda_{AA} = \frac{y_{\Delta} - y_A}{x_{\Delta} - x_A} = \frac{1-2}{8-(-1)} = -\frac{1}{9}$$

Οπότε η ευθεία ΑΔ (που διέρχεται π.χ. από το $A(-1,2)$) έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{3}(x + 1) \Rightarrow 3y - 6 = -x - 1 \Rightarrow 3y + x - 5 = 0$$

Η ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 2}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$

Η ΒΓ είναι κάθετη στην ΑΒ άρα έχει $\lambda = -\frac{1}{\lambda_{AB}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$

Οπότε η ευθεία ΒΓ (που διέρχεται π.χ. από το $B(1,3)$) έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -2(x - 1) \Rightarrow y - 3 = -2x + 2 \Rightarrow y + 2x - 5 = 0$$

Τέλος το Γ είναι το σημείο τομής των ευθειών ΒΓ και ΑΔ επομένως οι συντεταγμένες του θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} \text{ΑΔ: } 3y + x - 5 = 0 \\ \text{ΒΓ: } y + 2x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Επομένως είναι $\Gamma(2,1)$

10.6 6)

Είναι $\lambda_{BG} = \frac{y_G - y_B}{x_G - x_B} = \frac{4 - 2}{2 - (-2)} = \frac{1}{2}$

Ακόμα , η ΑΒ είναι κάθετη στην ΒΓ άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{1}{\lambda_{BG}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$

Και αφού διέρχεται από το $B(-2,2)$, έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -2(x + 2) \Rightarrow y - 2 = -2x - 4 \Rightarrow y + 2x + 2 = 0$$

Η ΑΔ είναι κάθετη στην ΔΓ που έχει $\lambda_{\Delta\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_\Delta}{x_\Gamma - x_\Delta} = \frac{4 - 3}{2 - 5} = -\frac{1}{3}$

Άρα η ΑΔ έχει $\lambda = -\frac{1}{\lambda_{\Delta\Gamma}} = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3$

Και αφού διέρχεται από το $\Delta(5,3)$ έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 3(x - 5) \Rightarrow y - 3 = 3x - 15 \Rightarrow y - 3x + 12 = 0$$

Τέλος , το Α είναι το σημείο τομής των ΑΒ και ΑΔ , επομένως οι συντεταγμένες του θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} \text{ΑΒ: } y + 2x + 2 = 0 \\ \text{ΑΔ: } y - 3x + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}$$

Επομένως είναι $A(2,-6)$

10.6 7)

Είναι : $\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{y_\Delta - y_\Gamma}{x_\Delta - x_\Gamma} = \frac{7 - 11}{3 - 11} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$

Οπότε η ευθεία ΓΔ (που διέρχεται π.χ. από το $\Delta(3,7)$) έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 7 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow 2y - 14 = x - 3 \Rightarrow 2y - x - 11 = 0$$

Η ΑΔ είναι κάθετη στην ΒΓ, άρα έχει: $\lambda_{\Delta\Delta} = -\frac{1}{\lambda_{\Gamma\Delta}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$

Και αφού διέρχεται από το $\Delta(3, 7)$, έχει εξίσωση:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 7 = -2(x - 3) \Rightarrow y - 7 = -2x + 6 \Rightarrow y + 2x - 13 = 0$$

Ακόμη, η ΕΓ έχει: $\lambda_{\text{ΕΓ}} = \frac{y_{\Gamma} - y_{\text{Ε}}}{x_{\Gamma} - x_{\text{Ε}}} = \frac{11 - 2}{11 - 8} = \frac{9}{3} = 3$

Οπότε αφού διέρχεται από το $\text{Ε}(8, 2)$ έχει εξίσωση:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 3(x - 8) \Rightarrow y - 2 = 3x - 24 \Rightarrow y - 3x + 22 = 0$$

Το σημείο Α είναι σημείο τομής των ΑΔ και ΕΓ, επομένως οι συντεταγμένες του θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} \text{ΑΔ: } y + 2x - 13 = 0 \\ \text{ΕΓ: } y - 3x + 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -1 \end{cases}$$

Επομένως είναι $\text{Α}(7, -1)$

Ακόμη, η ΕΒ είναι κάθετη στην ΕΓ άρα έχει $\lambda_{\text{ΑΒ}} = -\frac{1}{\lambda_{\text{ΕΓ}}} = -\frac{1}{3}$

Και αφού διέρχεται από το $\text{Ε}(8, 2)$ έχει εξίσωση:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 8) \Rightarrow 3y - 6 = -x + 8 \Rightarrow 3y + x - 14 = 0$$

Τέλος, το Β είναι το σημείο τομής των ευθειών ΕΒ και ΓΔ, επομένως οι συντεταγμένες του θα βρεθούν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} \text{ΕΒ: } 3y + x - 14 = 0 \\ \text{ΓΔ: } 2y - x - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$$

Επομένως είναι $\text{Β}(-1, 5)$

10.6 8)

Είναι: $\lambda_{\text{ΕΓ}} = \frac{y_{\Gamma} - y_{\text{Ε}}}{x_{\Gamma} - x_{\text{Ε}}} = \frac{-9 - (-1)}{10 - 4} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$

Οπότε η ευθεία ΕΓ (που διέρχεται π.χ. από το $\text{Ε}(4, -1)$) έχει εξίσωση:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y + 1 = -\frac{4}{3}(x - 4) \Rightarrow 3y + 3 = -4x + 16 \Rightarrow 3y + 4x - 13 = 0$$

Η ΑΒ είναι κάθετη στην ΕΓ οπότε έχει: $\lambda_{\text{ΑΒ}} = -\frac{1}{\lambda_{\text{ΕΓ}}} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$

από το $\text{Α}(5, 6)$, έχει εξίσωση:

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 6 = \frac{3}{4}(x - 5) \Rightarrow 4y - 24 = 3x - 15 \Rightarrow 4y - 3x - 9 = 0$$

Το Β είναι το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΕΓ οπότε οι συντεταγμένες του θα δοθούν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} \text{ΑΒ: } 3y + 4x - 13 = 0 \\ \text{ΕΓ: } 4y - 3x - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Επομένως είναι $B(1,3)$

Ακόμη, η $\Delta\Gamma$ είναι παράλληλη στην AB άρα έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, $\lambda = \frac{3}{4}$ και αφού διέρχεται από το $\Gamma(10,-9)$ έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y + 9 = \frac{3}{4}(x - 10) \Rightarrow 4y + 36 = 3x - 30 \Rightarrow 4y - 3x + 66 = 0$$

Η $A\Delta$ είναι κάθετη στην $\Delta\Gamma$ άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{4}{3}$ και αφού διέρχεται από το $A(5,6)$ έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 6 = -\frac{4}{3}(x - 5) \Rightarrow 3y - 18 = -4x + 20 \Rightarrow 3y + 4x - 38 = 0$$

Τέλος το Δ είναι το σημείο τομής των ευθειών $A\Delta$ και $\Delta\Gamma$, οπότε οι συντεταγμένες του θα δοθούν από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} A\Delta: 3y + 4x - 38 = 0 \\ \Delta\Gamma: 4y - 3x + 66 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 14 \\ y = -6 \end{cases}$$

Επομένως είναι $\Delta(14,-6)$

10.6 9)

Είναι $\lambda_{rz} = \frac{y_z - y_r}{x_z - x_r} = \frac{3 - (-1)}{7 - 5} = \frac{4}{2} = 2$ οπότε η ευθεία ZE (που διέρχεται π.χ. από το $Z(7,3)$) έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 7) \Rightarrow y - 3 = 2x - 14 \Rightarrow y - 2x + 11 = 0$$

$$\text{Ακόμη } \lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \frac{-1 - 2}{5 - (-4)} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

Είναι $A\Delta // B\Gamma$ άρα $\lambda_{A\Delta} = \lambda_{B\Gamma} = -\frac{1}{3}$

Οπότε η ευθεία $A\Delta$, που διέρχεται από το $E(2,7)$ έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 7 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y - 21 = -x + 2 \Rightarrow 3y + x - 23 = 0$$

Το σημείο Δ είναι σημείο τομής των ευθειών $A\Delta$ και $\Gamma\Delta$, οπότε οι συντεταγμένες του θα δοθούν από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} A\Delta: 3y + x - 23 = 0 \\ \Gamma\Delta: y + 2x - 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}$$

Επομένως είναι $\Delta(5,8)$

Ακόμα, $AB // \Gamma\Delta$ άρα $\lambda_{AB} = \lambda_{\Gamma\Delta} = 2$ οπότε η ευθεία AB , που διέρχεται από το $B(-4,2)$ έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 2(x + 4) \Rightarrow y - 2 = 2x + 8 \Rightarrow y - 2x - 10 = 0$$

Τέλος το A είναι το σημείο τομής των ευθειών $A\Delta$ και AB , οπότε οι συντεταγμένες του θα δοθούν από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} A\Delta: 3y + x - 23 = 0 \\ AB: y - 2x - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 8 \end{cases}$$

Επομένως είναι $A(-1,8)$

