

10.20 1)

Έστω Α η προβολή του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ε. Τότε

$$\text{Είναι } \lambda_{\varepsilon} = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-1} = 1 \stackrel{MA \perp \varepsilon}{\Rightarrow} \lambda_{MA} = -1$$

$$\text{Οπότε η ευθεία MA έχει εξίσωση } y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y + 1 = -1 \cdot (x - 4) \Rightarrow y = -x + 3$$

Θα βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου Α λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των MA και ε.

$$\text{Έχουμε } \begin{cases} y = -x + 3 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} . \text{ Άρα το A έχει συντεταγμένες } A(0, 3)$$

Έστω Μ'(α, β) το συμμετρικό του σημείου Μ(4, -1) ως προς την ευθεία ε : x - y + 3 = 0 .

Επειδή το Α είναι μέσο του ΜΜ' θα ισχύει

$$\begin{cases} \frac{\alpha + 4}{2} = 0 \\ \frac{\beta - 1}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 4 = 0 \\ \beta - 1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 7 \end{cases} . \text{ Οπότε το M' έχει συντεταγμένες M'(-4, 7)}$$

10.20 2)

Έστω Α η προβολή του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ε .

$$\text{Τότε είναι : } \lambda_{\varepsilon} = -\frac{A}{B} = -1 \stackrel{MA \perp \varepsilon}{\Rightarrow} \lambda_{MA} = 1$$

Οπότε η ευθεία MA έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - 5 = 1 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow y - x - 2 = 0$$

Θα βρούμε τις συντεταγμένες του Α λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των MB και ε:

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ y - x - 2 = 0 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2y = 6 \\ y - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Άρα το Α έχει συντεταγμένες Α(1, 3)

Έστω Μ'(α, β) το συμμετρικό του σημείου Μ(3, 5) ως προς την

$$\text{ευθεία } \varepsilon : x + y - 4 = 0$$

Επειδή το Α είναι το μέσο του ΜΜ' θα ισχύει :

$$\begin{cases} \frac{\alpha + 3}{2} = 1 \\ \frac{\beta + 5}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Οπότε το Μ' έχει συντεταγμένες Μ'(-1, 1)

10.20 3)

Έστω Α η προβολή του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ε .

$$\text{Τότε είναι : } \lambda_{\varepsilon} = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{3} \stackrel{MA \perp \varepsilon}{\Rightarrow} \lambda_{MA} = 3$$

Οπότε η ευθεία MA έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y + 2 = 3 \cdot (x - 6) \Leftrightarrow y - 3x + 20 = 0$$

Θα βρούμε τις συντεταγμένες του Α λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των MA και ε:

$$\begin{cases} x+3y-10=0 \\ y-3x+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10-3y \\ y-3(10-3y)+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10-3y \\ 10y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=1 \end{cases}$$

Έστω $M'(\alpha, \beta)$ το συμμετρικό του σημείου $M(6, -2)$ ως προς την ευθεία $\varepsilon: x+3y-10=0$

Επειδή το A είναι το μέσο του MM' θα ισχύει :

$$\begin{cases} \frac{\alpha+6}{2}=7 \\ \frac{\beta-2}{2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=8 \\ \beta=4 \end{cases}$$

10.20 4)

Έστω A η προβολή του σημείου M πάνω στην ευθεία ε .

$$\text{Τότε είναι : } \lambda_{\varepsilon} = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{5} \stackrel{MA \perp \varepsilon}{\Rightarrow} \lambda_{MA} = 5$$

Οπότε η ευθεία MA έχει εξίσωση :

$$y-y_0 = \lambda(x-x_0) \Leftrightarrow y+3 = 5 \cdot (x-2) \Leftrightarrow y-5x+13=0$$

Θα βρούμε τις συντεταγμένες του A λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των MA και ε :

$$\begin{cases} x+5y-13=0 \\ y-5x+13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=13-5y \\ y-5(13-5y)+13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=13-5y \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

Έστω $M'(\alpha, \beta)$ το συμμετρικό του σημείου $M(2, -3)$ ως προς την ευθεία $\varepsilon: x+5y-13=0$

Επειδή το A είναι το μέσο του MM' θα ισχύει :

$$\begin{cases} \frac{\alpha+2}{2}=3 \\ \frac{\beta-3}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=4 \\ \beta=7 \end{cases}$$

Οπότε το M έχει συντεταγμένες $M(4, 7)$

10.20 5)

Έστω A η προβολή του σημείου $M(7, 6)$ πάνω στην ευθεία ε .

$$\text{Τότε είναι : } \lambda_{\varepsilon} = -\frac{A}{B} = -4 \stackrel{MA \perp \varepsilon}{\Rightarrow} \lambda_{MA} = \frac{1}{4}$$

Οπότε η ευθεία MA έχει εξίσωση :

$$y-y_0 = \lambda(x-x_0) \Leftrightarrow y-6 = \frac{1}{4} \cdot (x-7) \Leftrightarrow 4y-24 = x-7 \Leftrightarrow x-4y+17=0$$

Θα βρούμε τις συντεταγμένες του A λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των MA και ε :

$$\begin{cases} 4x+y-17=0 \\ x-4y+17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

Έστω $M'(\alpha, \beta)$ το συμμετρικό του σημείου $M(7, 6)$ ως προς την ευθεία $\varepsilon: 4x+y-17=0$

Επειδή το Α είναι το μέσο του ΜΜ' θα ισχύει :

$$\begin{cases} \frac{\alpha+7}{2}=3 \\ \frac{\beta+6}{2}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=4 \end{cases}$$

Οπότε το Μ' έχει συντεταγμένες Μ'(-1,4)

10.20 6)

Έστω Α η προβολή του σημείου Μ(-5,4) πάνω στην ευθεία ε .

$$\text{Τότε είναι : } \lambda_{\varepsilon} = -\frac{A}{B} = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda_{MA} = -3$$

Οπότε η ευθεία ΜΑ έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Leftrightarrow y - 4 = -3 \cdot (x + 5) \Leftrightarrow 3x + y + 11 = 0$$

Θα βρούμε τις συντεταγμένες του Α λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των ΜΑ και ε:

$$\begin{cases} 3x + y + 11 = 0 \\ x - 3y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 11 \\ x - 3(-3x - 11) + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Αρα το Α έχει συντεταγμένες Α(-4,1)

Έστω Μ'(α,β) . Επειδή το Α είναι μέσο του ΜΜ' θα ισχύει :

$$\begin{cases} \frac{\alpha-5}{2} = -4 \\ \frac{\beta+4}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

Οπότε το Μ' έχει συντεταγμένες Μ'(-3,-2)

10.20 7)

$$\alpha) \lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{A}{B} = 1$$

$$\varepsilon_2 \perp \varepsilon_1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = -1$$

και αφού διέρχεται από το Α(4,-2) θα έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = -1(x - 4) \Rightarrow y + x - 2 = 0$$

β) Το σημείο τομής θα βρεθεί από την λύση του συστήματος των εξισώσεων των ε₁ και ε₂

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Αρα το σημείο Β έχει συντεταγμένες Β(0,2)

γ) Το Α(4,-2) ανήκει στην ε₂ αφού $4 = -(-2) + 2$ που ισχύει

Αρα το σημείο τομής Β των ε₁ ⊥ ε₂ είναι η προβολή του Α πάνω στην ευθεία ε₁

Οπότε για το Γ(α,β) που είναι το συμμετρικό του Α ως προς την ε₁ θα ισχύει :

$$\begin{cases} \frac{\alpha+4}{2} = 0 \\ \frac{\beta-2}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 6 \end{cases}$$

Οπότε το Γ έχει συντεταγμένες Γ(-4,6)

