

10.15 1)

Αρχικά θα βρούμε το σημείο Α ως λύση του συστήματος

$$\begin{cases} \text{ΑΔ} : x - 4y + 19 = 0 \\ \text{ΑΓ} : x + 3y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases} . \text{Οπότε είναι } A(-3, 4)$$

Η ευθεία ΓΔ έχει εξίσωση $2x - y - 11 = 0$ οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\Gamma\Delta} = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-1} = 2$

Επειδή η ευθεία ΑΒ είναι παράλληλη στην ΓΔ θα είναι $\lambda_{AB} = \lambda_{\Gamma\Delta} \Rightarrow \lambda_{AB} = 2$ και άρα θα έχει εξίσωση $AB : y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = 2(x + 3) \Rightarrow y - 4 = 2x + 6 \Rightarrow 2x - y + 10 = 0$

Τώρα θα βρούμε το σημείο Γ ως λύση του συστήματος

$$\begin{cases} \text{ΑΔ} : x - 4y + 19 = 0 \\ \text{ΑΔ} : 2x - y - 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases} . \text{Οπότε είναι } \Gamma(6, 1)$$

Η ευθεία ΑΔ έχει εξίσωση $x - 4y + 19 = 0$ άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\Gamma\Delta} = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}$

Επειδή η ευθεία ΓΒ είναι παράλληλη στην ΑΔ θα είναι $\lambda_{B\Gamma} = \lambda_{A\Delta} \Rightarrow \lambda_{B\Gamma} = \frac{1}{4}$ και άρα θα έχει

εξίσωση $AB : y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{4}(x - 6) \Rightarrow 4y - 4 = x - 6 \Rightarrow x - 4y - 2 = 0$

10.15 2)

Αρχικά θα βρούμε το σημείο Α ως λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ 8x - y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} . \text{Οπότε είναι } A(1, -4)$$

Η ευθεία ΒΓ έχει εξίσωση $x + 2y - 6 = 0$ οπότε έχει συντελεστή διεύθυνσης :

$$\lambda_{B\Gamma} = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{2}$$

Η ευθεία ΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ άρα είναι $\lambda_{A\Delta} = -\frac{1}{\lambda_{B\Gamma}} = 2$

Και άρα έχει εξίσωση :

$$A\Delta : y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y + 4 = 2(x - 1) \Rightarrow y + 4 = 2x - 2 \Rightarrow y - 2x + 6 = 0$$

10.15 3)

α) Το Δ ανήκει στην ευθεία ΑΔ άρα για να βρούμε την τεταγμένη του , χρησιμοποιούμε την εξίσωση της ΑΔ :

$$2(-8) - y + 18 = 0 \Rightarrow -16 - y + 18 = 0 \Rightarrow y = 2$$

Άρα είναι $\Delta(-8, 2)$

$$\text{Ακόμη, } B\Gamma \perp A\Delta \text{ άρα } \lambda_{B\Gamma} = -\frac{1}{\lambda_{A\Delta}} = -\frac{1}{2}$$

Οπότε η ΒΓ έχει εξίσωση :

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 8) \Rightarrow 2y - 4 = -x - 8 \Rightarrow 2y + x + 4 = 0$$

β) Το Α είναι το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΑΔ άρα θα βρεθεί ως λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x-y+18=0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=8 \end{cases} \quad \text{Οπότε είναι } A(-5,8)$$

Ακόμη, η ΑΓ είναι κάθετη στην ΑΒ άρα έχει $\lambda_{AB} = -\frac{-1}{\lambda_{AG}} = \frac{-1}{-1} = 1$

Οπότε η ΑΓ έχει εξίσωση :

$$y - y_o = \lambda(x - x_o) \Rightarrow y - 8 = 1 \cdot (x + 5) \Rightarrow x - y + 13 = 0$$

10.15 4)

α) Είναι $AB // \Delta\Gamma$ άρα $\lambda_{AB} = \lambda_{\Delta\Gamma} = -\frac{A}{B} = \frac{1}{2}$

Άρα η ευθεία ΑΒ (που διέρχεται π.χ. από το $E(2,7)$) έχει εξίσωση :

$$y - y_o = \lambda(x - x_o) \Rightarrow y - 7 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y - 14 = x - 2 \Rightarrow x - 2y + 12 = 0$$

β) Το Α είναι το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΑΓ, άρα λύνουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} x - 2y + 12 = 0 \\ 4x - 3y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases} \quad \text{Οπότε είναι } A(4,8)$$

γ) $A\Delta \perp \Gamma\Delta$ άρα $\lambda_{A\Delta} = \frac{-1}{\lambda_{\Gamma\Delta}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$

και αφού η ΑΔ διέρχεται από το $A(4,8)$ θα έχει εξίσωση :

$$y - y_o = \lambda(x - x_o) \Rightarrow y - 8 = -2(x - 4) \Rightarrow y - 8 = -2x + 8 \Rightarrow 2x + y - 16 = 0$$

δ) Η ΒΓ // ΑΔ άρα $\lambda_{B\Gamma} = \lambda_{A\Delta} = -2$

Ακόμη, διέρχεται από το Γ που είναι σημείο τομής των ΑΓ και ΔΓ :

$$\begin{cases} 4x - 3y + 8 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{Οπότε είναι } \Gamma(-2,0)$$

Άρα η ευθεία ΒΓ έχει εξίσωση :

$$y - y_o = \lambda(x - x_o) \Rightarrow y - 0 = -2(x + 2) \Rightarrow y = -2x - 4 \Rightarrow y + 2x + 4 = 0$$